

# Outils ensemblistes pour l'analyse et la synthèse d'une paramétrisation de Youla

Anamaria Luca, Pedro Rodriguez-Ayerbe et Didier Dumur

# Sommaire

## Sommaire

### Préliminaires

Objectif  
Outils

### Systèmes linéaires

Description  
Résultats principaux  
Exemple

### Systèmes en commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état  
Synthèse paramètre  
de Youla  
Exemple

### Conclusion. Perspectives

## 1 Sommaire

## 2 Préliminaires

- Objectif
- Outils

## 3 Systèmes linéaires

- Description
- Résultats principaux
- Exemple

## 4 Systèmes en commutation

- Synthèse observateur et retour d'état
- Synthèse paramètre de Youla
- Exemple

## 5 Conclusion. Perspectives

# Sommaire

Sommaire

**Preliminaires**

Objectif

Outils

**Systèmes  
linéaires**

Description

Résultats principaux

Exemple

**Systèmes en  
commutation**

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

**Conclusion.  
Perspectives**

- 1 Sommaire
- 2 **Preliminaires**
- 3 Systèmes linéaires
- 4 Systèmes en commutation
- 5 Conclusion. Perspectives

# Objectif

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

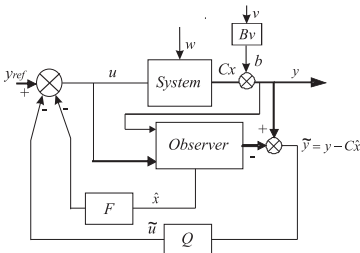
Conclusion.  
Perspectives

Soit un système linéaire (en commutation, LPV) en temps discret, soumis à des **perturbations** bornées et **contraintes** physiques.

- analyse d'une commande existante (type retour de sortie avec/sans paramètre de Youla) par rapport à l'ensemble invariant maximal satisfaisant les contraintes ;
- synthèse d'un paramètre de Youla pour obtenir l'espace maximal ;
- compromis entre robustesse et performance du système en boucle fermé.

# Le parametre de Youla

**Le paramètre de Youla** : assure la paramétrisation de tous les correcteurs stabilisants et permet de robustifier les correcteurs vis-a-vis des incertitudes ou des perturbations.



Correcteur dans l'espace d'état avec  
le paramètre de Youla.

# Ensemble invariant

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

## Definition

L'ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est dit positive invariant pour un système :

$$x(k+1) = f(x(k))$$

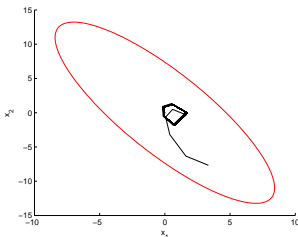
si pour tout  $x(0) \in S$  la solution  $x(k) \in S$  pour  $k > 0$ . Si  $x(0) \in S$  implique  $x(k) \in S$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  alors nous disons que  $S$  est invariant.

## Proposition

*La condition d'invariance est équivalente à l'existence d'une fonction de Lyapunov et donc à un test de stabilité.*

# Input-to-state stability (ISS)

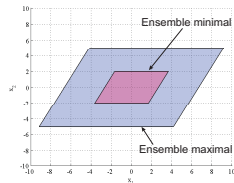
- en présence d'une perturbation, la notion de stabilité entrée-état (input to state stability) est utilisée ;
- l'origine est un point asymptotiquement stable pour le système nominal ;
- toutes les trajectoires de l'état sont bornées pour toutes les séquences de perturbation bornées.



Trajectoire de l'état pour un système avec des perturbations.

# Ensemble invariant maximal/minimal

- Ensemble invariant **maximal** :
  - région maximale de l'espace assurant invariance, ISS et satisfaction des contraintes en présence des perturbations (et/ou incertitudes) ;
  - plus l'ensemble maximal est grand, plus petit est l'effet de la perturbation (et/ou incertitudes) ;
- Ensemble invariant **minimal** :
  - région minimale de l'espace assurant invariance, ISS et satisfaction des contraintes en présence des perturbations (et/ou incertitudes)  $\Rightarrow$  **0-reachable set** ;
  - plus l'ensemble minimal est petit, plus petit est l'effet de la perturbation (et/ou incertitudes).



Ensemble invariant maximal/minimal.

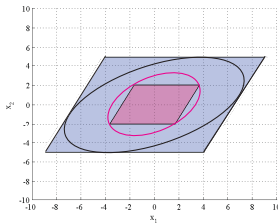


# Approximation des ensembles invariants. Ellipsoïdes

Ensembles ellipsoïdaux :

$$E = \{x \mid x^T P x \leq 1, P = G^{-1} \succ 0 \text{ symétrique}\}$$

- **Ellipsoïde minimal**  $\Rightarrow$  le plus petit ellipsoïde contenant l'ensemble invariant minimal ;
- **Ellipsoïde maximal**  $\Rightarrow$  le plus grand ellipsoïde à l'intérieur de l'ensemble invariant maximal ;



Ellipsoïde minimal/maximal.

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes

linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

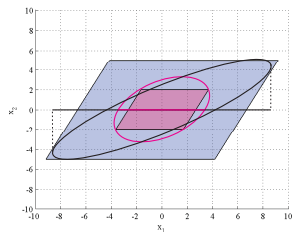
# Intersection\projection ellipsoïdale

On cherche les ensembles ellipsoïdaux :

$$E = \{x \mid x^T P x \leq 1, P = G^{-1} \succ 0 \text{ symétrique}\}$$

tel que :

- l'intersection ellipsoïdale avec le sous-espace de l'état initial  $x_i$  :  
 $E_i = \{x_i \mid x_i^T T P T^T x_i \leq 1, x_i = T x\}$  est minimale ou
- la projection ellipsoïdale sur le sous-espace de l'état initial  $x_i$  :  
 $E_p = \{x_i \mid x_i^T (T G T^T)^{-1} x_i \leq 1, x_i = T x\}$  est maximale.



Intersection/projection  
avec/sur l'espace de l'état.

# Linear matrix inequalities (LMI). S-procedure

## Definition

Une inégalité matricielle linéaire est une expression de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum x_i F_i \succeq 0,$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les variables,  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont donnés, et  $F(x) \succ 0$  signifie que  $F(x)$  est une matrice symétrique semi-définie positive.

Cette inégalité matricielle linéaire caractérise un ensemble convexe selon  $x$ .

## Definition

S procedure : Soit  $F_0 = F_0^T, F_1 = F_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Pour tout  $x$  tel que  $x^T F_1 x \geq 0$ , l'expression  $x^T F_0 x > 0$  est vérifiée s'il existe un  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$  tel que  $F_0 - \alpha F_1 \succ 0$

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

# Sommaire

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

- 1 Sommaire
- 2 Préliminaires
- 3 Systèmes linéaires
- 4 Systèmes en commutation
- 5 Conclusion. Perspectives

# Objectif

Pour un système linéaire en temps discret avec le retour d'état et le gain d'observateur connus, affecté par des perturbations bornées et contraintes :

- **synthèse du paramètre de Youla** qui donne l'ellipsoïde invariant ayant la **projection maximale (intersection minimale)** au moyen des LMI (gain en robustesse par rapport au système avec observateur) ;
- **compromis** entre robustesse et performance :
  - méthodes basées sur la fonction de Lyapunov ;
  - placement des pôles ;
- analyse de l'**effet de Youla** sur les ensembles invariants, les fonctions de sensibilité et le comportement temporel.

# Description du système

- Système linéaire en temps discret :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_\omega \omega(k) \\ y(k) &= Cx(k) + B_v v(k)\end{aligned}$$

- Observateur :

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k)\end{aligned}$$

- Paramètre de Youla :

$$\begin{aligned}x_Q(k+1) &= A_Q x_Q(k) + B_Q \tilde{y}(k) \\ \tilde{u}(k) &= C_Q x_Q(k) + D_Q \tilde{y}(k) \\ \tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}(k)\end{aligned}$$

- Contrainte sur la norme Euclidienne de la commande :

$$\|u\|_2 \leq u_{max}.$$

- Vecteur de bruit  $n = [\omega^T \ v^T]^T$  borné :  $n^T n \leq 1$ .

# Système avec observateur.

- Représentation de l'état augmenté pour le système avec observateur :

$$x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o n(k)$$

où :  $x_o(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \epsilon(k) \end{bmatrix}$ ,  $\epsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  est l'erreur,

$$A_o = \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \text{ et } B_o = \begin{bmatrix} B_\omega & 0 \\ B_\omega & -LB_v \end{bmatrix}.$$

- Commande :

$$u(k) = -F\hat{x}(k) = F_o x_o(k)$$

où :  $F_o = \begin{bmatrix} -F & F \end{bmatrix}$ .

- Ellipsoïde invariant :

$$E_o = \{x \mid x^T P_o x \leq 1, P_o = G_o^{-1} \succ 0 \text{ symétrique}\}.$$

- Projection ellipsoïdale :  $E_{op} = \{x \mid x^T (TG_o T^T)^{-1} x \leq 1, x = Tx_o\}.$

- Intersection ellipsoïdale :  $E_{oi} = \{x \mid x^T TP_o T^T x \leq 1, x = Tx_o\}.$

# Système avec observateur et paramètre de Youla

- Représentation de l'état augmenté pour le système avec observateur et Youla :

$$x_y(k+1) = A_y x_y(k) + B_y n(k)$$

où :

$$x_y(k) = \begin{bmatrix} x_o(k) \\ x_Q(k) \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} A_e - B_e D_Q C_e & -B_e C_Q \\ B_Q C_e & A_Q \end{bmatrix}, A_e = A_o, B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$C_e = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}, B_y = \begin{bmatrix} B_{\omega e} & -L_e B_v - B_e D_Q B_v \\ 0 & B_Q B_v \end{bmatrix}, B_{\omega e} = \begin{bmatrix} B_{\omega} \\ B_{\omega} \end{bmatrix}, L_e = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}.$$

- Commande :

$$u(k) = -F \hat{x}(k) - \tilde{u}(k) = -F_x \cdot x_y(k) - F_v \cdot n(k),$$

$$\text{où : } F_x = [F_o + D_Q C_e \quad C_Q] \text{ et } F_v = [0 \quad D_Q B_v].$$

- Ellipsoïde invariant :  $E_y = \{x \mid x^T P_y x \leq 1, P_y = P_y^T = G_y^{-1} \succ 0\}$
- Projection ellipsoïdale :  $E_{yp} = \{x \mid x^T (Z G_y Z^T)^{-1} x \leq 1, x = Z x_y\}$
- Intersection ellipsoïdale :  $E_{yi} = \{x \mid x^T Z P_y Z^T x \leq 1, x = Z x_y\}$



# Observateur. Calcul des ensembles ellipsoïdaux.

## Théorème

Soit un système linéaire en temps-discret avec observateur, contraintes et bruit :

- l'intersection minimale est obtenue par l'optimization suivante :

$$\min_{P_o \succ 0, \alpha > 0} -\log \det(TP_o T^T)$$

soumise à :

$$\begin{bmatrix} P_o & 0 & \alpha P_o & A_o^T P_o \\ 0 & \alpha I & 0 & B_o^T P_o \\ \alpha P_o & 0 & \alpha P_o & 0 \\ P_o A_o & P_o B_o & 0 & P_o \end{bmatrix} \succ 0 \text{ et } \begin{bmatrix} P_o & F_o^T \\ F_o & u_{max}^2 \end{bmatrix} \succ 0$$

- la projection maximale est obtenue par l'optimization suivante :

$$\min_{G_o \succ 0, \alpha > 0} -\log \det(TG_o T^T)$$

soumise à :

$$\begin{bmatrix} G_o & 0 & \alpha G_o & G_o A_o^T \\ 0 & \alpha I & 0 & B_o^T \\ \alpha G_o & 0 & \alpha G_o & 0 \\ A_o G_o & B_o & 0 & G_o \end{bmatrix} \succ 0 \text{ et } \begin{bmatrix} G_o & G_o F_o^T \\ F_o G_o & u_{max}^2 \end{bmatrix} \succ 0$$

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

- Le problème à résoudre ( $\min - \log \det(TP_o T^T) / \max \log \det(TG_o T^T)$ ) résulte de :
  - ❶ Le volume des ellipsoïdes est inversement proportionnel au produit de valeurs propres, c'est-à-dire, le déterminant.
  - ❷ Pour rendre le problème convexe, l'opérateur "logarithme" est utilisé.
- Pour assurer l'invariance vis-a-vis des perturbations considérées, la S procédure a été employée.
- La présence de  $\alpha \Rightarrow$  BMI.

- Le problème à résoudre ( $\min - \log \det(TP_o T^T) / \max \log \det(TG_o T^T)$ ) résulte de :
  - ❶ Le volume des ellipsoïdes est inversement proportionnel au produit de valeurs propres, c'est-à-dire, le déterminant.
  - ❷ Pour rendre le problème convexe, l'opérateur "logarithme" est utilisé.
- Pour assurer l'invariance vis-a-vis des perturbations considérées, la S procédure a été employée.
- La présence de  $\alpha \Rightarrow$  BMI. Mais...

- Le problème à résoudre ( $\min - \log \det(TP_o T^T) / \max \log \det(TG_o T^T)$ ) résulte de :
  - ❶ Le volume des ellipsoïdes est inversement proportionnel au produit de valeurs propres, c'est-à-dire, le déterminant.
  - ❷ Pour rendre le problème convexe, l'opérateur "logarithme" est utilisé.
- Pour assurer l'invariance vis-a-vis des perturbations considérées, la S procédure a été employée.
- La présence de  $\alpha \Rightarrow$  BMI. Mais... $\alpha$  scalaire  $\Rightarrow$  problème résolu par une simple boucle récursive.

# La paramétrisation de Youla. Motivation

## Sommaire

### Préliminaires

Objectif

Outils

### Systèmes linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

### Systèmes en commutation

Synthèse observateur et retour d'état

Synthèse paramètre de Youla

Exemple

### Conclusion. Perspectives

## Lemma

*S'il existe un ellipsoïde invariant assurant la satisfaction des contraintes et l'ISS pour le système avec observateur alors il existe au moins un ellipsoïde invariant pour le système avec Youla.*

## Proposition

*En insérant un paramètre de Youla dans la boucle fermée du système avec observateur, on peut obtenir une projection ellipsoïdale plus grande (une intersection ellipsoïdale plus petite) que celle obtenue pour le système avec observateur.*

# La paramétrisation de Youla. Préliminaires

- Considerant :  $G = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \bullet \end{bmatrix}$ ,  $G^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \bullet \end{bmatrix}$

avec  $\bullet$  uniquement déterminé à partir de  $GG^{-1} = I$   
( $XY + UV^T = I$ ),  $U, V \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  et  $X, Y \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ .

- La taille du paramètre de Youla :  $n_q = 2n_x$ .

L'objectif est la maximisation de la projection

$$E_{yp} = \{x \mid x^T (TXT^T)^{-1} x \leq 1\}, \quad x = Tx_o$$

car  $Zx_y = Tx_o$  et  $ZGZ^T = TXT^T$  ( $Z = [I \ 0 \ 0]$ ,  $T = [I \ 0]$ ).

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

# Synthèse Youla. Projection maximale

## Théorème

Considérant un système linéaire en temps discret avec contraintes d'entrée et affecté par un bruit borné. Le paramètre de Youla qui maximise la projection  $E_{xp}$  est réalisé hors ligne, par l'optimization suivante :

$$\min_{X, Y, M, N, H, D_Q, \alpha} -\log \det(TXT^T)$$

soumise à :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \star & \star & \star \\ 0 & \alpha I & & \\ \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & 0 & \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \star \\ \begin{bmatrix} A_e X - B_e M & A_e - B_e D_Q C_e \\ H & Y A_e + N C_e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{\omega e} & -L_e B_v - B_e D_Q B_v \\ Y B_{\omega e} & -Y L_e B_v + N B_v \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \succeq 0$$

et

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \star & \star \\ \begin{bmatrix} F_e X + M & F_e + D_Q C_e \\ 0 & F_n^T \end{bmatrix} & u_{max}^2 I & \star \\ & F_n^T & I \end{bmatrix} \succeq 0.$$

La notation  $\star$  se réfère à la valeur symétrique.

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

# Synthèse Youla. Projection maximale

Dans les LMIs précédentes nous avons considéré :

$$\begin{cases} M = D_Q C_e X + C_Q U^T, \\ N = -Y B_e D_Q + V B_Q, \\ H = Y A_e X - Y B_e D_Q C_e X + V B_Q C_e X - Y B_e C_Q U^T + V A_Q U^T \end{cases}$$

Si le problème de maximisation a une solution alors :

$$\begin{cases} U, V \text{ peut être déterminée par factorisation de } UV^T = I - XY, \\ B_Q = V^{-1}(M + Y B_e D_Q), \\ C_Q = (N - D_Q C_e X) U^{-T}, \\ A_Q = V^{-1}(H - Y A_e X + Y B_e D_Q C_e X - V B_Q C_e X + Y B_e C_Q U^T) U^{-T}. \end{cases}$$

## Remarque

Pour minimiser l'intersection  $E_{yi} = \{x | x^T (Z P_y Z^T) x = x^T (T Y T^T) x \leq 1\}$  le programme d'optimisation suivant doit être résolu :

$$\min_{X, Y, M, N, H, D_Q, \alpha} -\log \det(T Y T^T)$$

soumise aux deux LMI précédentes.

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives



# Compromis entre robustesse et performance

- La synthèse du Youla offre une bonne robustesse mais ralentit souvent les performances en boucle fermée.

- Critère de performance :

- vitesse de décroissance plus grande pour la fonction de Lyapunov :

$$V(k) - V(k+1) \geq \frac{1}{\gamma} (u(k)^T R u(k) + y(k)^T Q y(k))$$

- placement de pôles : placer les pôles de la boucle fermée dans un cercle avec le centre dans l'origine et le rayon  $r < 1$  ;

**Résultats :** ↓ perte en volume pour l'ellipsoïde invariant & dégradation de la fonction de sensibilité,  
↑ gain en termes de fonction de sensibilité complémentaire.

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

# Méthode fondée sur la fonction de Lyapunov

## Théorème

Le paramètre de Youla qui maximise la projection  $E_{yp}$  assurant une vitesse de décroissance plus grande pour la fonction de Lyapunov est obtenu hors-ligne, par l'optimization suivante :

$$\min_{X, Y, M, N, H, D_Q, \alpha} -\log \det(TXT^T)$$

soumise à :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * & * & * & * \\ 0 & \alpha I & * & * & * & * \\ \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & 0 & \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * & * \\ \begin{bmatrix} A_o X - B_e M & A_o - B_e D_Q C_e \\ H & Y A_o + N C_e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{\omega e} & -L_e B_v - B_e D_Q B_v \\ Y B_{\omega e} & -Y L_e B_v + N B_v \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * \\ \begin{bmatrix} Q^{1/2} [C_f X & C_f] \\ R^{1/2} [F_o X + M & F_o + D_Q C_e] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Q^{1/2} [0 & B_v] \\ R^{1/2} F_n \end{bmatrix} & 0 & 0 & \gamma I & * \\ & & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succeq 0$$

et

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * \\ \begin{bmatrix} F_e X + M & F_e + D_Q C_e \\ 0 & \end{bmatrix} & u_{max}^2 I & * \\ & F_n & I \end{bmatrix} \succeq 0$$

avec  $C_f = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$ .

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes

linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.

Perspectives

# Placement de pôles

## Théorème

Le paramètre de Youla qui maximise la projection  $E_{yp}$  assurant le placement des pôles de la boucle fermée dans un cercle avec le centre dans l'origine et le rayon  $r < 1$  est obtenu hors-ligne, par l'optimization suivante :

$$\min_{X, Y, M, N, H, D_Q, \alpha} -\log \det(TXT^T)$$

soumise à :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \begin{matrix} \star \\ \alpha I \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \star \\ \star \\ \star \end{matrix} \\ \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \begin{matrix} \star \\ \star \\ \star \end{matrix} & \begin{matrix} \star \\ \star \\ \star \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A_e X - B_e M & A_e - B_e D_Q C_e \\ H & Y A_e + N C_e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{\omega e} & -L_e B_v - B_e D_Q B_v \\ Y B_{\omega e} & -Y L_e B_v + N B_v \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \\ 0 \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \begin{matrix} \star \\ \star \\ \star \end{matrix} \\ r \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \begin{matrix} \star \\ \star \\ \star \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A_o X - B_e M & A_o - B_e D_Q C_e \\ H & Y A_o + N C_e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \\ r \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \succeq 0 \text{ et } \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \begin{matrix} \star \\ \star \\ \star \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} F_e X + M & F_e + D_Q C_e \\ 0 & u_{max}^2 I \\ F_n^T & I \end{bmatrix} \succeq 0.$$

# Exemple

Soit un moteur à induction avec un modèle couple-position :

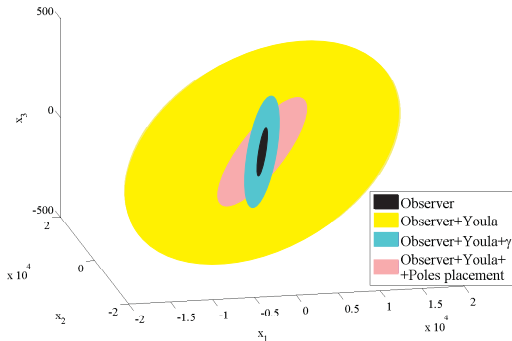
$$H_0 = \frac{\theta(s)}{\tau_{ref}(s)} = \frac{1}{s(f + Js)}, \quad T_e = 0.0011$$

et action intégrale  $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$ ,  $\|u\|_2 \leq 5V$ .

- Matrices d'état :  $A = \begin{bmatrix} 1.9980 & -0.9980 & 0.0156 \\ 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0.0156 \\ 0 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$ ,  
 $C = [0.0053 \quad 0.0053 \quad 0]$ ,  $B_v = 0.001$ ,  $B_\omega = [0 \ 0 \ 0]^T$ .
- Retour d'état :  $F = [9.4739 \quad -8.7277 \quad 0.9417]$  avec les pôles  $[0.9233 \quad 0.9233 \quad 0.0682]$ .
- Gain de l'observateur :  $L = [58.9993 \quad 49.1245 \quad 41.6667]^T$  avec les pôles  $[0.8 \quad 0.81 \quad 0.82]$ .

# Ensembles invariants

- Observateur :  $V_O = 1.47 \cdot 10^6$ .
- Youla :  $V_Y = 1.26 \cdot 10^{10}$ .
- Youla+ $\gamma$  :  $V_{Y\gamma} = 1.1 \cdot 10^8, \gamma = 10000$ .
- Youla+placement de pôles :  $V_{Yp} = 1.1 \cdot 10^8, r = 0.98$ .



Projection maximale

# Résultats en fréquence

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes

linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

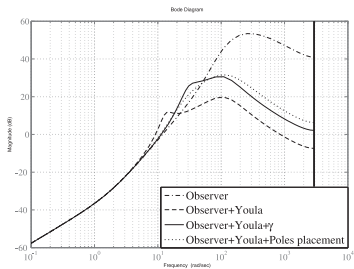
Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

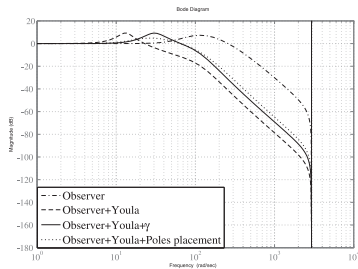
Conclusion.

Perspectives

Fonction de sensibilité vis-a-vis d'une  
incertitude additive

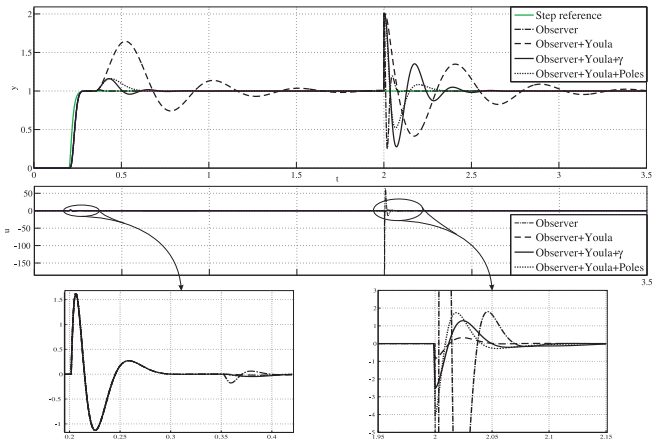


Fonction de sensibilité  
complémentaire vis-a-vis d'une  
incertitude additive



# Résultats temporels

Le réponse (la commande) à une perturbation unitaire sur la commande a l'instant 0,35s et une perturbation unitaire sur la sortie a l'instant 2s.



Simulation temporelle.

# Sommaire

## Sommaire

## Préliminaires

Objectif

Outils

## Systèmes linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

## Systèmes en commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

## Conclusion. Perspectives

- 1 Sommaire
- 2 Préliminaires
- 3 Systèmes linéaires
- 4 Systèmes en commutation
- 5 Conclusion. Perspectives



# Description du système

Sommaire

Préliminaires

Objectif  
Outils

Systèmes  
linéaires

Description  
Résultats principaux  
Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état  
Synthèse paramètre  
de Youla  
Exemple

Conclusion.  
Perspectives

- Système linéaire en commutation :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_\sigma x(k) + B_\sigma u(k) + B_\omega \omega(k), \\y(k) &= C_\sigma x(k) + B_v v(k), \\u(k) &= -F_\sigma \hat{x}(k).\end{aligned}$$

- Observateur :

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A_\sigma \hat{x}(k) + B_\sigma u(k) + L_\sigma (y(k) - \hat{y}(k)), \\\hat{y}(k) &= C_\sigma \hat{x}(k),\end{aligned}$$

$\sigma$  est une règle de commutation prenant ses valeurs dans l'ensemble fini  $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ .

- Vecteur de bruit  $n = [\omega^T \ v^T]^T$  borné :  $n^T n \leq 1$ .
- Représentation de l'état augmenté pour le système avec observateur :

$$x_o(k+1) = A_{o\sigma} x_o(k) + B_{o\sigma} n(k),$$

$$\text{où : } A_{o\sigma} = \begin{bmatrix} A_\sigma - B_\sigma F_\sigma & B_\sigma F_\sigma \\ 0 & A_\sigma - L_\sigma C_\sigma \end{bmatrix}, \quad B_{o\sigma} = \begin{bmatrix} B_\omega & 0 \\ B_\omega & -L_\sigma B_v \end{bmatrix}$$

- Commande :

$$u(k) = -F_{o\sigma} \cdot x_o(k),$$

$$\text{où : } F_{o\sigma} = [F_\sigma \quad -F_\sigma].$$

# Analyse stabilité

## Théorème

Soit un système linéaire en commutation avec observateur et bruit borné. Le système est ISS s'il existe  $P_o > 0, \alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tel que :

$$\begin{bmatrix} P_o & 0 & \alpha P_o & A_o^T P_o \\ 0 & \alpha I & 0 & B_{oi}^T P_o \\ \alpha P_o & 0 & \alpha P_o & 0 \\ P_o A_{oi} & P_o B_{oi} & 0 & P_o \end{bmatrix} \succ 0, i = \overline{1, N}, \alpha \geq \beta.$$

Idée de base pour la synthèse :

$$B_{oi} \rightarrow B_{oi} = \begin{bmatrix} B_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_w & -L_i B_v \end{bmatrix}, i = \overline{1, N}$$
$$n \rightarrow n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, n_1 = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, n_2 = \begin{bmatrix} \omega_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, n_1^T n_1 \leq 1, n_2^T n_2 \leq 1.$$

On considère que le bruit qu'affecte le système peut être différent de celui qu'affecte l'erreur  $\epsilon = x - \hat{x}$ .

# Synthèse observateur et retour d'état

## Théorème

Soit un système linéaire en commutation avec observateur affecté par un bruit borné. S'il existe  $G \succ 0$ ,  $P \succ 0$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\gamma > 0$  tel que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} G & 0 & \alpha G & GA_i^T - Y_i^T B_i^T \\ 0 & \beta I & 0 & [B_w \ 0]^T \\ \alpha G & 0 & \alpha G & 0 \\ A_i G - B_i Y_i & [B_w \ 0] & 0 & G \end{bmatrix} \succ 0, \alpha - \beta \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 & \alpha P & A_i^T P - C_i^T Z_i^T \\ 0 & \gamma I & 0 & [PB_w - Z_i B_v]^T \\ \alpha P & 0 & \alpha P & 0 \\ PA_i - Z_i C_i & [PB_w - Z_i B_v] & 0 & P \end{bmatrix} \succ 0, \alpha - \gamma \geq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

alors le système est ISS. Les retours d'état et les gains de l'observateur sont :

$$F_i = Y_i G^{-1}, \quad L_i = P^{-1} Z_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Preuve : LMI analyse  $\iff$  LMIs synthèse

# Projection maximale

## Théorème

*Soit un système linéaire en commutation avec observateur, contraintes  $\|u\| \leq u_{\max}$  et bruit borné. La projection maximale est obtenue par l'optimization suivante :*

$$\min_{G_o > 0, \alpha > 0, \beta > 0} -\log \det(TG_o T^T)$$

*soumise à :*

$$\begin{bmatrix} G_o & 0 & \alpha G_o & G_o A_{oi}^T \\ 0 & \alpha I & 0 & B_{oi}^T \\ \alpha G_o & 0 & \alpha G_o & 0 \\ A_{oi} G_o & B_{oi} & 0 & G_o \end{bmatrix} \succ 0, \begin{bmatrix} G_o & G_o F_{oi}^T \\ F_{oi} G_o & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succ 0, \alpha \geq \beta,$$
$$i = \overline{1, N}.$$

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

# Synthèse Youla. Description du système

- Paramètre de Youla :

$$\begin{aligned}x_Q(k+1) &= A_{Q\sigma}x_Q(k) + B_{Q\sigma}\tilde{y}(k), \\ \tilde{u}(k) &= C_{Q\sigma}x_Q(k) + D_{Q\sigma}\tilde{y}(k), \\ \tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}(k),\end{aligned}$$

- Représentation de l'état augmenté pour le système avec observateur et Youla :

$$\begin{aligned}x_y(k+1) &= A_{y\sigma}x_y(k) + B_{y\sigma}n(k) \\ \text{où : } A_{y\sigma} &= \begin{bmatrix} A_{e\sigma} - B_{e\sigma}D_{Q\sigma}C_{e\sigma} & -B_{e\sigma}C_{Q\sigma} \\ B_{Q\sigma}C_{e\sigma} & A_{Q\sigma} \end{bmatrix}, A_{e\sigma} = A_{o\sigma}, B_{e\sigma} = \begin{bmatrix} B_{\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_{e\sigma} &= [0 \ C_{\sigma}], B_{y\sigma} = \begin{bmatrix} B_{\omega e} & -L_{e\sigma}B_v - B_{e\sigma}D_{Q\sigma}B_v \\ 0 & B_{Q\sigma}B_v \end{bmatrix}, B_{\omega e} = \begin{bmatrix} B_{\omega} \\ B_{\omega} \end{bmatrix}, L_{e\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_{\sigma} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

- Commande :

$$u(k) = -F_{x\sigma} \cdot x_y(k) - F_{n\sigma} \cdot n(k),$$

$$\text{où : } F_{x\sigma} = [F_{o\sigma} + D_{Q\sigma}C_{e\sigma} \quad C_{Q\sigma}] \text{ et } F_{n\sigma} = [0 \ D_{Q\sigma}B_v].$$

- Contrainte sur la norme Euclidienne de la commande :

$$\|u\|_2 \leq u_{\max}.$$

- Vecteur de bruit  $n = [\omega^T \ v^T]^T$  borné :  $n^T n \leq 1$ .

# Synthèse Youla. Projection maximale

## Théorème

Considérant un système linéaire en commutation avec contraintes d'entrée et affecté par un bruit borné. Les paramètres de Youla qui maximisent la projection sont obtenus par l'optimization suivante :

$$\max_{X, Y, M_i, N_i, H_i, D_{Q_i}, \alpha} \log \det(TXT^T)$$

soumise à :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * & * \\ 0 & \alpha I & * & * \\ \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & 0 & \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * \\ \begin{bmatrix} A_{ei}X - B_{ei}M_i & A_{ei} - B_{ei}D_{Q_i}C_{ei} \\ H_i & YA_{ei} + N_iC_{ei} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{\omega e} & -L_{ei}B_v - B_{ei}D_{Q_i}B_v \\ YB_{\omega e} & -YL_{ei}B_v + N_iB_v \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \succeq 0$$

et

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & * & * \\ \begin{bmatrix} F_{ei}X + M_i & F_{ei} + D_{Q_i}C_{ei} \\ 0 & F_{ni}^2 I \end{bmatrix} & u_{max}^2 I & * \end{bmatrix} \succeq 0, \alpha \geq \beta, \alpha > 0, \beta \geq 0, i = \overline{1, N},$$

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.

Perspectives

# Synthèse Youla. Placement de pôles

## Théorème

*Si les intervalles entre les instants de commutation sont assez grands pour garantir l'adaptation de chaque mode, les paramètres de Youla qui maximisent la projection de l'ellipsoïde invariant, assurant le placement des pôles de la boucle fermée dans un cercle avec le centre dans l'origine et le radius  $r < 1$  sont obtenus par l'optimization suivante :*

$$\max_{X, Y, M_i, N_i, H_i, D_{Q_i}, \alpha} \log \det(TXT^T)$$

soumise à :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \star & \star & \star \\ 0 & \alpha I & \star & \star \\ \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & 0 & \alpha \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \star \\ \begin{bmatrix} A_{ei}X - B_{ei}M_i & A_{ei} - B_{ei}D_{Q_i}C_{ei} \\ H_i & YA_{ei} + N_iC_{ei} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{\omega e} & -L_{ei}B_v - B_{ei}D_{Q_i}B_v \\ YB_{\omega e} & -YL_{ei}B_v + N_iB_v \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \star \\ \begin{bmatrix} A_{oi}X - B_{ei}M_i & A_{oi} - B_{ei}D_{Q_i}C_{ei} \\ H_i & YA_{oi} + N_iC_{ei} \end{bmatrix} & r \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \succeq 0, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} & \star & \star \\ \begin{bmatrix} F_{ei}X + M_i & F_{ei} + D_{Q_i}C_{ei} \\ 0 & u_{max}^2 I \\ F_{ni} & \star & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\alpha \geq \beta, \alpha > 0, \beta \geq 0, i = \overline{1, N}.$$

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes

linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

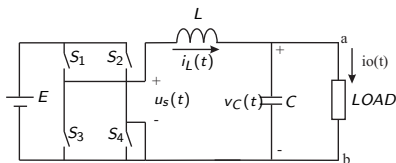
Exemple

Conclusion.

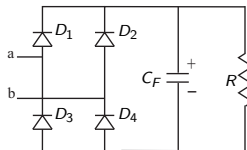
Perspectives

# Système UPS (uninterruptible power supply)

- Un UPS fournit une alimentation d'urgence en cas de panne de courant :



Système UPS.



Redresseur en pont de Graetz avec  
filtrage capacitif

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = A_{ci}x_s(t) + B_{ci}u_s(t) + B_{c\omega}\omega(t), & \text{où : } x_s(t) = [v_C(t) \ i_L(t)]^T, \\ y_s(t) = C_{ci}x_s(t) + B_v v(t), & i = 1, 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix}, B_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, C_{c1} = [1 \ 0] \text{ si } D_1, \dots, D_4 \text{ off}, (i_o(t) = 0) \\ A_{c2} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R(C+C_F)} & \frac{1}{C+C_F} \\ \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix}, B_{c2} = B_{c1}, C_{c2} = C_{c1} \text{ si } D_1, D_4 \text{ on} / D_2, D_3 \text{ on}, (i_o(t) \neq 0). \end{cases}$$



# Système UPS (uninterruptible power supply)

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

- Discrétisation :

$$\begin{cases} x_s(k+1) = A_{di}x_s(k) + B_{di}u_s(k) + B_{d\omega}\omega(k), \\ y_s(k) = C_{di}x_s(k) + B_vv(k), \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

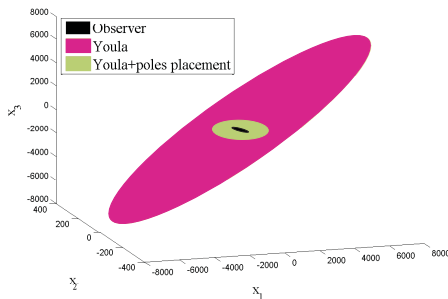
- Action intégrale :  $u_s(k) = u_s(k-1) + \Delta u_s(k)$
- Le système final est dans la forme classique avec :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_s(k) \\ u_s(k) \end{bmatrix}, u(k) = \Delta u_s(k), y(k) = y_s(k), B_\omega = \begin{bmatrix} B_{d\omega} \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$A_i = \begin{bmatrix} A_{di} & B_{di} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_{di} \\ 1 \end{bmatrix}, C_i = [C_{di} \quad 0], i = 1, 2.$$

- Valeurs numériques :  $T_s = 1/108000s$ ,  $L = 1mH$ ,  $C = 100\mu F$ ,  $R = 24\Omega$ ,  $C_F = 330\mu F$ ,  $E = 250V$ , erreur actionneur : 2% de la commande, erreur capteur : 2% de la tension de sortie nominale ( $\approx 150V$ ),  $u_{max} = 75V$ .

# Ensembles invariants

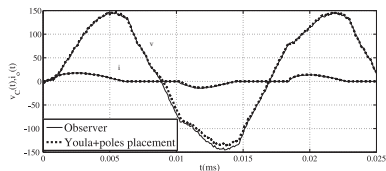
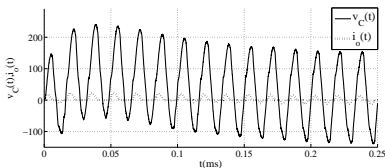
- Observateur :  $V_O = 2.75 \cdot 10^6$ ,  $F_1 = [0.297 \ 3.67 \ 1]$ ,  $F_2 = [0.265 \ 3.343 \ 1]$ ,  $L_1 = [1.217 \ 0.435 \ 0.396]^T$ ,  $L_2 = [0.913 \ 0.449 \ 0.396]^T$ .
- Youla :  $V_Y = 6.28 \cdot 10^9$ .
- Youla+placement de pôles :  $V_{Yp} = 1.86 \cdot 10^8$ ,  $r = 0.97$ .



Les projection des ellipsoïdes invariants.

# Résultats temporels

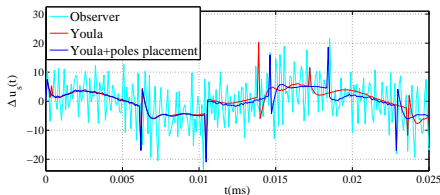
Tension de sortie et courant de charge (perturbation en échelon à  $t=0.008$ , bruit de mesure aléatoire borné)



Paramètre de Youla.

Observateur/Youla+placement pôles.

Simulation temporelle de la entrée.



Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

# Sommaire

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

- 1 Sommaire
- 2 Préliminaires
- 3 Systèmes linéaires
- 4 Systèmes en commutation
- 5 Conclusion. Perspectives

# Conclusions

Pour un système linéaire, en commutation ou LPV en temps discret avec contraintes et bruit :

- Synthèse retour d'état et gain d'observateur ;
- Synthèse paramètre de Youla ;
- La présence du paramètre de Youla :
  - réduit/agrandit l'ellipsoïde minimal/maximal ;
  - une bonne fonction de sensibilité mais dégrade la fonction de sensibilité complémentaire.
- Compromis entre robustesse et performance :
  - méthode fondée sur la fonction de Lyapunov ;
  - placement des poles.
- Résultats théoriques validés en simulations.

Sommaire

Préliminaires

Objectif

Outils

Systèmes  
linéaires

Description

Résultats principaux

Exemple

Systèmes en  
commutation

Synthèse observateur  
et retour d'état

Synthèse paramètre  
de Youla

Exemple

Conclusion.  
Perspectives

Pour un système en commutation, affecté par des contraintes et bruit borné :

- l'application des méthodes ensemblistes à une commande à horizon fini (type MPC) ;
  - offline : en ajoutant des degrés de liberté (et en considérant une fonction de Lyapunov pour chaque mode) on augment l'ellipsoïde invariant ;
  - online : on minimise la norme du signal ajouté de façon à satisfaire les contraintes.