Choix de l'horizon de commande dans une statégie CPNL pour des systèmes chaînés

E. COURTIAL[1], M. FRUCHARD[1], G. ALLIBERT[2]

[1]Laboratoire PRISME, Université d'Orléans
[2]Laboratoire I3S UNS-CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis

Contexte de l'étude

Les systèmes non holonomes (NH)

- Exemples : unicycle, voiture, voiture avec remorques, ...
- Modèle mathématique :

$$(S) \quad \dot{z} = \sum_{i=1}^{m} Z_i(z) u_i, \quad z \in N, dim(N) = n$$

La commande des systèmes NH

- Système commandable (condition de rang LARC)
- Linéarisé non commandable en un point fixe
- Théorème de Brockett [Brockett 83] : il n'existe pas de retour d'état continu temps invariant stabilisant (S).

Travaux existants

- Approche instationnaire [Samson 90, Coron 92] : $u(x, t)$
- Fonctions transverses [Samson & Morin 03] : commande virtuelle et stabilisation pratique
- Contrôleurs discontinus [Canudas de Wit & Sordalen 92]
- Contrôleurs hybrides [Bennani & Rouchon 95]
- Approche prédictive [van Essen & Nijmeijer 01, Alamir & Marchand 03, Grimm et al. 05]

CPNL pour les systèmes NH

- Beaucoup de travaux en poursuite de trajectoire
- Peu de travaux en contrôle de l'état complet (position et orientation)
- Hypothèses de détectabilité, de bornitude de la fonction coût ...
- La plupart du temps : $N_c = N_p \longrightarrow$ temps de calcul important

Problématique

Problème :

Comment peut-on déterminer la longueur minimale de l'horizon de commande N_c assurant la faisabilité de la CPNL pour des systèmes non holonomes ?

$\hookrightarrow$ Réduction de la complexité du problème d'optimisation

$\hookrightarrow$ Diminution du temps de calcul

Modélisation

- Les systèmes "sans dérive" en coordonnées naturelles s'écrivent :

$$(S)\ \ \dot{z} = \sum_{i=1}^{m} Z_i(z)u_i, \quad z \in N, dim(N) = n.$$

- La solution du système (S) est donnée par :

$$z(t) = e^{t\sum_{i=1}^{m} u_i Z_i}(z_0).$$

Degré de non holonomie

Le degré de non holonomie se définit par :

$$p = min\{i \in \mathbb{N} : \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}\} \text{ avec}$$

- $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(Z_1, \cdots, Z_m)$
- $\mathfrak{g}_1 = span\{Z_1, \cdots, Z_m\}$
- $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_{k-1} + [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{k-1}], \quad k \geq 2.$

- degré de NH = Image de la difficulté à se déplacer
- propriété intrinsèque du système.

Systèmes chaînés

Il existe un difféomorphisme transformant le système (S) en un système chaîné de dimension $(2, n)$ de la forme :

$$(S') \begin{cases} \dot{x} &= X_1(x)v + X_2 w \\ X_1 &= (1, 0, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\ X_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0) \end{cases}$$

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \nu = (v, w) \in \mathbb{R}^2$$

Le degré de non holonomie de (S') est : $p = n - 1$.

Exemple de l'unicycle

En coordonnées naturelles : $z = (x_c, y_c, \theta)$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2$$

En coordonnées chaînées : $x = (x_1, x_2, x_3) = (x_c, tan\theta, y_c)$
$\nu = (v, w) = (u_1 cos\theta,\ u_2/cos^2\theta)$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} w$$

Degré de non holonomie : p = n - 1 = 2.

Problème posé

- Soit (S') un système NH sous forme chaînée de dimension $(2, n)$
- Soit $\tilde{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_{N_c})$, une séquence de commandes sur N_c périodes d'échantillonnage T_e
- Soit x_f la solution de (S') pour cette séquence de commandes :

$$x_f(\tilde{\nu}) = e^{Y_{N_c}} \circ \cdots \circ e^{Y_2} \circ e^{Y_1} \circ x_0$$

Problème 1 :

Quelle est la longueur minimale de N_c telle qu'il existe une séquence de commandes $\tilde{\nu}$ amenant le système de x_0 à x_f ?

Proposition

Proposition 1 :

Résoudre le *Problème 1* pour tout système chaîné (S') de dimension $(2, n)$ nécessite un horizon de commande $N_c = p + 1$.

Démonstration :

- Pour les systèmes en coordonnées chaînées [Fruchard and all., ACC, June 2012]
- Pour les systèmes en coordonnées naturelles [Courtial and all., ICRA, May 2012]
- Il faut prouver que l'application $s : \tilde{\nu} \mapsto x_f$ est surjective.

Remarques

- La preuve fournit une Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) pour la stabilisation en un point.
- Cette CNS est relaxée en Condition Nécessaire (CN) pour la CPNL :
  - L'erreur n'est pas nulle, elle est minimisée sur l'horizon de prédiction.
  - La prise en compte de contraintes peut réduire l'ensemble des solutions.
- Pour des systèmes en coordonnées naturelles (S), la CN est $N_c = p$.

Illustration

Exemple de la voiture : $n = 4, m = 2, p = 3$

(S) Coordonnées naturelles : $z = (x_c, y_c, \theta, \phi)$

(S') Coordonnées chaînées : $x = (x_c, \frac{\tan\phi}{l\cos^3\theta}, \tan\theta, y_c)$

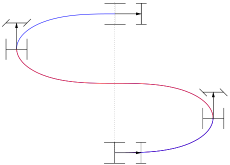
$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \frac{\tan\phi}{l} \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 \qquad \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w$$

Illustration

Exemple de la voiture : $n = 4, m = 2, p = 3$

(S) Coordonnées naturelles :
$z = (x_c, y_c, \theta, \phi)$

(S') Coordonnées chaînées :
$x = (x_c, \frac{\tan\phi}{l\cos^3\theta}, \tan\theta, y_c)$



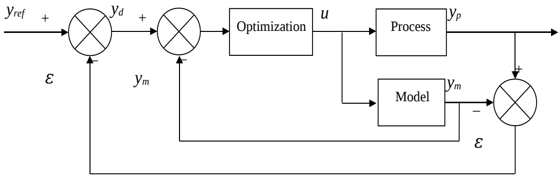
IMPOSSIBLE !

$N_c = p = 3$

$N_c = p + 1 = 4$

Structure de contrôle

Commande à modèle interne



$$y_d(k) = y_{ref}(k) - \epsilon(k)$$

$$\epsilon(k) = y_p(k) - y_m(k)$$

$$\hookrightarrow y_{ref}(k) - y_p(k) = y_d(k) - y_m(k)$$

Modèle de prédiction

Système chaîné (2,n) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X_1(x(t))v(t) + X_2 w(t)\ ,\ x(0) = x_0 \\ y_m(k+j \mid k) = x((k+j)T_e). \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\nu = (v, w) \in \mathbb{R}^2$, $y_m \in \mathbb{R}^n$.

Les commandes sont maintenues constantes sur T_e :
$\forall j \in [1; N_p]$,

$$\begin{aligned} v(t) &= v(k+j-1 \mid k) \text{ pour } (k+j-1)T_e < t < (k+j)T_e, \\ w(t) &= w(k+j-1 \mid k) \text{ pour } (k+j-1)T_e < t < (k+j)T_e. \end{aligned}$$

Fonction coût

Grâce à la structure CMI, on peut écrire :

$$J(x,\nu) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} [y_{d(k+j|k)} - y_{m(k+j|k)}]^T Q_{(j)} [y_{d(k+j|k)} - y_{m(k+j|k)}]$$

$Q_{(j)}$ est une matrice de pondération, symétrique définie

positive, variant dans le temps suivant la loi :

$$Q(j) = \alpha Q(j-1) \text{ avec } \alpha \geq 1.$$

Résolution du problème

$$\begin{cases} \min\limits_{\widetilde{\nu}} \; J(x,\nu) \\ \text{soumis à } \dot{x} = X_1(x)v + X_2 w. \end{cases}$$

avec $\widetilde{\nu} = \{\nu(k), \nu(k+1), ..., \nu(k+N_c), ..., \nu(k+N_p-1)\}$.

Les paramètres de réglage :

- L'horizon de prédiction N_p : stabilité/temps de calcul
- L'horizon de commande N_c : en accord avec la *Proposition 1*, $N_c \geq p+1$.
- Algorithme d'optimisation standard (fmincon de Matlab)

Conditions

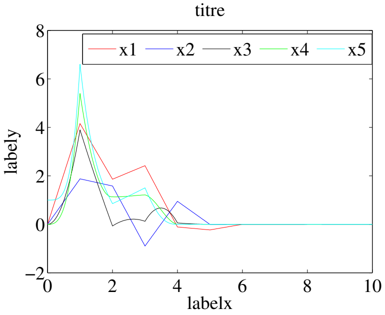
- Une voiture avec une remorque
- Modèle chaîné de dimension (2,5) :

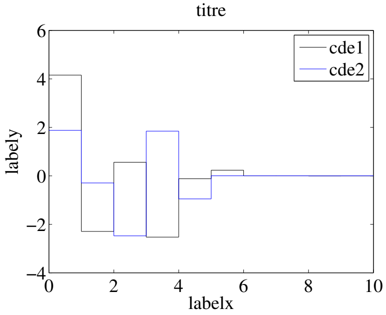
$$X_1(x) = (1,\ 0,\ x_2,\ x_3,\ x_4), \quad X_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0).$$

- Degré de non holonomie : $p = n - 1 = 4$
- Les différents paramètres :
  - $N_p = 10$
  - $N_c = p + 1 = 5$
  - $Q(j) = 5Q(j-1)$ avec $Q(1) = I$.

Déplacement transversal

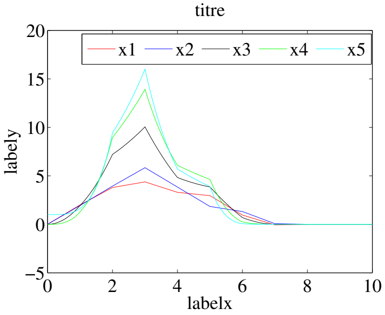
- Pose de départ=$(0, 0, 0, 0, 1)$, pose d'arrivée=$(0, 0, 0, 0, 0)$
- Pas de contraintes

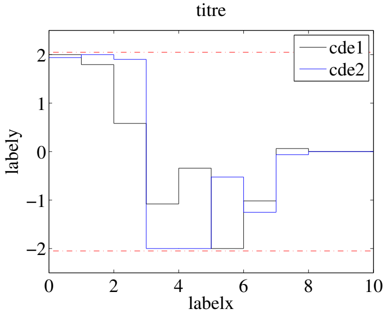




Contraintes sur les commandes

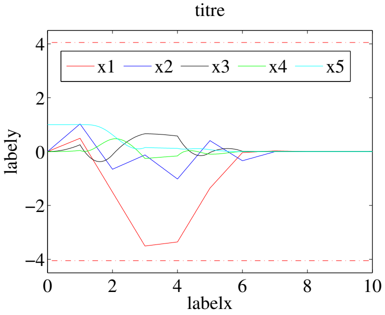
- $|v| \leq 2$
- $|w| \leq 2$

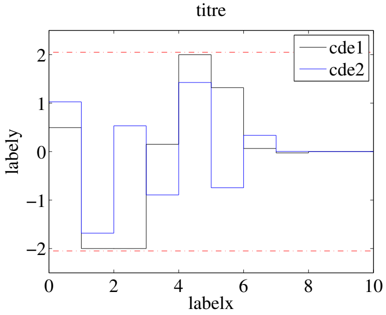




Contraintes sur l'état et les commandes

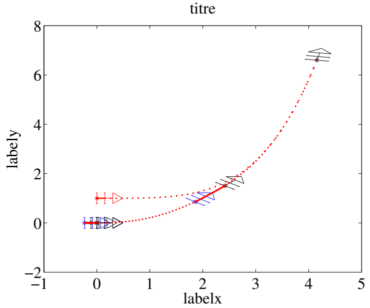
- $|x_i| \leq 4$
- $|v| \leq 2, |w| \leq 2$



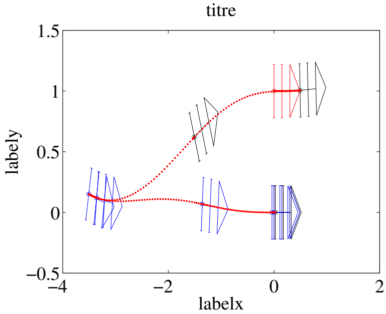


Dans l'espace *XY*

Sans contrainte

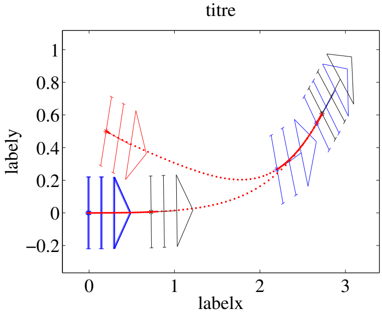


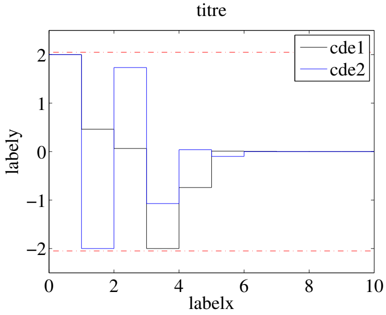
Avec contraintes



Pose initiale différente

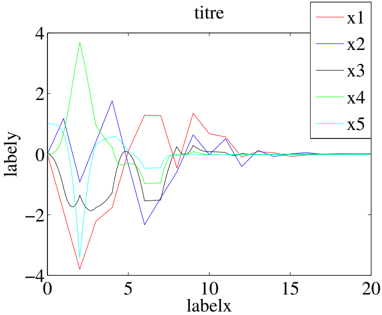
- Pose de départ=$(0.2, -0.6, 0.25, -0.3, 0.5)$
- Contraintes sur les commandes et sur l'état

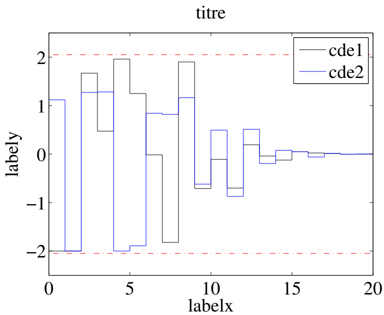




Erreurs de modélisation

- 25% sur x_5
- 5% sur les commandes
- Contraintes sur les commandes : $|v| \leq 2, |w| \leq 2$





Conclusions

- Relation entre le degré de NH et l'horizon de commande : $N_c = p$ pour (S) et $N_c = p + 1$ pour (S')
- Condition nécessaire sur N_c prouvée théoriquement
- Simulations "réalistes" : prise en compte de contraintes sur les commandes et les états, d'erreurs de modélisation et/ou de perturbation
- Robustesse de l'approche
- Diminution du temps de calcul