



Commande prédictive pour le rendez-vous orbital

Georgia Deaconu, Christophe Louembet et Alain Théron

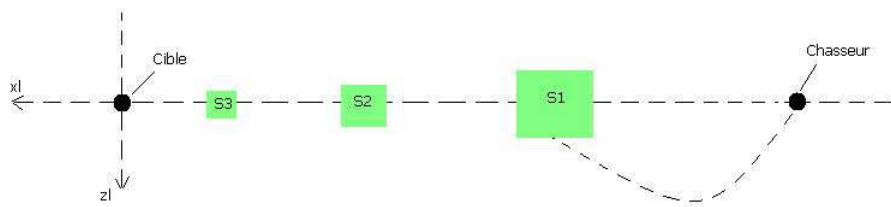
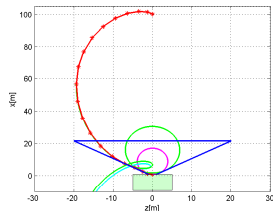
Laboratoire d'Analyse de d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS)
Méthodes et Algorithmes de Commande

Paris, le 22 Novembre 2012

Opérations de proximité des satellites

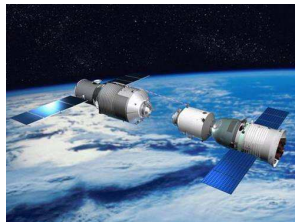
Les **opérations de proximité** des satellites sont des opérations sensibles qui imposent des contraintes dures sur la trajectoire relative:

- **sécurité** passive/active en cas de panne;
- suivi d'une **trajectoire périodique** pour l'inspection visuelle;
- **contraintes de visibilité** sur la trajectoire de rendez-vous;



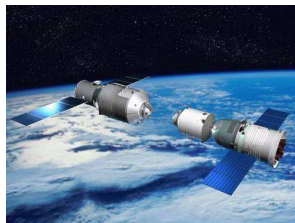
Le rendez-vous orbital à temps fixé

- réalisé entre un satellite **chasseur** et un satellite **cible**;
- caractérisé par des **conditions finales** spécifiées;
- utilisation de la **commande impulsionnelle**;



Le rendez-vous orbital à temps fixé

- réalisé entre un satellite **chasseur** et un satellite **cible**;
- caractérisé par des **conditions finales** spécifiées;
- utilisation de la **commande impulsionnelle**;

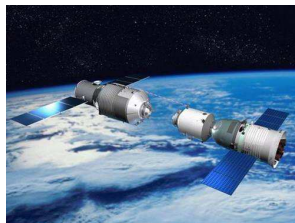


La **commande prédictive** est utilisée pour le design du plan de manœuvres:

- horizon de prédiction fixé;
- les **objectifs de la mission** se traduisent en des conditions finales :
 - rallier sur une trajectoire relative périodique;
 - la trajectoire périodique doit évoluer dans une zone de tolérance.
- **contraintes opérationnelles**;
- **incertitudes de navigation**;

Le rendez-vous orbital à temps fixé

- réalisé entre un satellite **chasseur** et un satellite **cible**;
- caractérisé par des **conditions finales** spécifiées;
- utilisation de la **commande impulsionnelle**;



La **commande prédictive** est utilisée pour le design du plan de manœuvres:

- horizon de prédiction fixé;
- les **objectifs de la mission** se traduisent en des conditions finales :
 - rallier sur une trajectoire relative périodique;
 - la trajectoire périodique doit évoluer dans une zone de tolérance.
- **contraintes opérationnelles**;
- **incertitudes de navigation**;

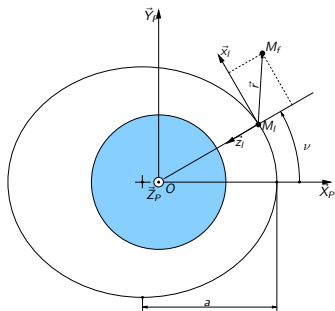
Comment choisir les bonnes conditions finales?

- 1 Dynamique linéarisée des satellites
- 2 Trajectoires périodiques contraintes
- 3 Guidage en mouvement périodique de proximité
 - Le cas nominal
 - Prise en compte des incertitudes de navigation
- 4 Exemples
- 5 Conclusion

- 1 Dynamique linéarisée des satellites
- 2 Trajectoires périodiques contraintes
- 3 Guidage en mouvement périodique de proximité
 - Le cas nominal
 - Prise en compte des incertitudes de navigation
- 4 Exemples
- 5 Conclusion

Dynamique linéarisée des satellites

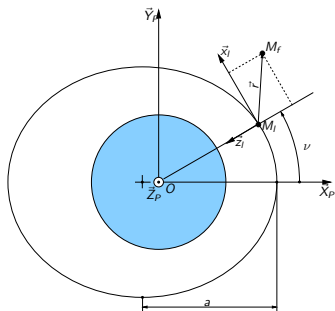
- exprimé dans un repère cartésien **local** attaché au satellite cible;
- l'**anomalie vraie** de la cible est la variable indépendante;



$$\begin{aligned}\tilde{x}'' &= 2\tilde{z}' + \tilde{u}_x \\ \tilde{y}'' &= -\tilde{y} + \tilde{u}_y \\ \tilde{z}'' &= \frac{3}{1+e \cos \nu} \tilde{z} - 2\tilde{x}' + \tilde{u}_z\end{aligned}$$

Dynamique linéarisée des satellites

- exprimé dans un repère cartésien **local** attaché au satellite cible;
- l'**anomalie vraie** de la cible est la variable indépendante;



$$\begin{aligned}\tilde{x}'' &= 2\tilde{z}' + \tilde{u}_x \\ \tilde{y}'' &= -\tilde{y} + \tilde{u}_y \\ \tilde{z}'' &= \frac{3}{1+e \cos \nu} \tilde{z} - 2\tilde{x}' + \tilde{u}_z\end{aligned}$$

En utilisant la **matrice de transition** Φ de Yamanaka-Ankersen [YA2002] et un contrôle impulsifnel:

$$X(\nu) = \Phi(\nu_1, \nu)(X(\nu_1) + B\Delta V_1) = \Phi(\nu_1, \nu)X(\nu_1)^+$$

Propagation de la trajectoire relative à partir d'un état initial X_1 :

$$\tilde{x}(\nu) = (2 + e \cos \nu)(d_1 \sin \nu - d_2 \cos \nu) + d_3 + 3d_4 J_\nu (1 + e \cos \nu)^2$$

$$\tilde{y}(\nu) = d_5 \cos \nu + d_6 \sin \nu$$

$$\tilde{z}(\nu) = (1 + e \cos \nu)(d_2 \sin \nu + d_1 \cos \nu) - 3e d_4 J_\nu \sin \nu (1 + e \cos \nu) + 2d_4$$

Position relative des satellites

Propagation de la trajectoire relative à partir d'un état initial X_1 :

$$\tilde{x}(\nu) = (2 + e \cos \nu)(d_1 \sin \nu - d_2 \cos \nu) + d_3 + 3d_4 J_\nu (1 + e \cos \nu)^2$$

$$\tilde{y}(\nu) = d_5 \cos \nu + d_6 \sin \nu$$

$$\tilde{z}(\nu) = (1 + e \cos \nu)(d_2 \sin \nu + d_1 \cos \nu) - 3e d_4 J_\nu \sin \nu (1 + e \cos \nu) + 2d_4$$

- trajectoire définie par le vecteur de paramètres $D = C(\nu_1)X_1$

Propagation de la trajectoire relative à partir d'un état initial X_1 :

$$\tilde{x}(\nu) = (2 + e \cos \nu)(d_1 \sin \nu - d_2 \cos \nu) + d_3 + 3d_4 J_\nu (1 + e \cos \nu)^2$$

$$\tilde{y}(\nu) = d_5 \cos \nu + d_6 \sin \nu$$

$$\tilde{z}(\nu) = (1 + e \cos \nu)(d_2 \sin \nu + d_1 \cos \nu) - 3ed_4 J_\nu \sin \nu (1 + e \cos \nu) + 2d_4$$

- trajectoire définie par le vecteur de paramètres $D = C(\nu_1)X_1$
- dépendance linéaire des paramètres vis-à-vis de la commande appliquée si

$$X_1 = X(\nu_1) + B\Delta V_1 = X(\nu_1)^+$$

Position relative des satellites

Propagation de la trajectoire relative à partir d'un état initial X_1 :

$$\tilde{x}(\nu) = (2 + e \cos \nu)(d_1 \sin \nu - d_2 \cos \nu) + d_3 + 3d_4 J_\nu (1 + e \cos \nu)^2$$

$$\tilde{y}(\nu) = d_5 \cos \nu + d_6 \sin \nu$$

$$\tilde{z}(\nu) = (1 + e \cos \nu)(d_2 \sin \nu + d_1 \cos \nu) - 3e d_4 J_\nu \sin \nu (1 + e \cos \nu) + 2d_4$$

- trajectoire définie par le vecteur de paramètres $D = C(\nu_1)X_1$
- dépendance linéaire des paramètres vis-à-vis de la commande appliquée si

$$X_1 = X(\nu_1) + B\Delta V_1 = X(\nu_1)^+$$

- le terme $J_\nu = \int_{\nu_1}^{\nu} \frac{d\tau}{(1 + e \cos \tau)^2}$ cause l'éloignement des satellites.

Propagation de la trajectoire relative à partir d'un état initial X_1 :

$$\tilde{x}(\nu) = (2 + e \cos \nu)(d_1 \sin \nu - d_2 \cos \nu) + d_3 + 3d_4 J_\nu (1 + e \cos \nu)^2$$

$$\tilde{y}(\nu) = d_5 \cos \nu + d_6 \sin \nu$$

$$\tilde{z}(\nu) = (1 + e \cos \nu)(d_2 \sin \nu + d_1 \cos \nu) - 3e d_4 J_\nu \sin \nu (1 + e \cos \nu) + 2d_4$$

- trajectoire définie par le vecteur de paramètres $D = C(\nu_1)X_1$
- dépendance linéaire des paramètres vis-à-vis de la commande appliquée si

$$X_1 = X(\nu_1) + B\Delta V_1 = X(\nu_1)^+$$

- le terme $J_\nu = \int_{\nu_1}^{\nu} \frac{d\tau}{(1 + e \cos \tau)^2}$ cause l'éloignement des satellites.

Comment obtenir des trajectoires périodiques?

Mouvement relatif périodique

Mouvement périodique: $d_4 = 0 \implies M(\nu_1)X_1 = 0$

Mouvement relatif périodique

Mouvement périodique: $d_4 = 0 \implies M(\nu_1)X_1 = 0$

L'ensemble des états appartenant à des **trajectoires périodiques** est défini par:

$$S(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0\}$$

Mouvement relatif périodique

Mouvement périodique: $d_4 = 0 \implies M(\nu_1)X_1 = 0$

L'ensemble des états appartenant à des **trajectoires périodiques** est défini par:

$$S(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0\}$$

- $S(\nu)$ est un **ensemble invariant** pour le mouvement relatif autonome des satellites

Mouvement relatif périodique

Mouvement périodique: $d_4 = 0 \implies M(\nu_1)X_1 = 0$

L'ensemble des états appartenant à des **trajectoires périodiques** est défini par:

$$S(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0\}$$

- $S(\nu)$ est un **ensemble invariant** pour le mouvement relatif autonome des satellites
- l'ensemble $S(\nu)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

Mouvement relatif périodique

Mouvement périodique: $d_4 = 0 \implies M(\nu_1)X_1 = 0$

L'ensemble des états appartenant à des **trajectoires périodiques** est défini par:

$$S(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0\}$$

- $S(\nu)$ est un **ensemble invariant** pour le mouvement relatif autonome des satellites
- l'ensemble $S(\nu)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

Choisir les conditions finales du rendez-vous dans $S(\nu)$?

Mouvement relatif périodique

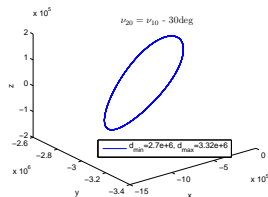
Mouvement périodique: $d_4 = 0 \implies M(\nu_1)X_1 = 0$

L'ensemble des états appartenant à des **trajectoires périodiques** est défini par:

$$S(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0\}$$

- $S(\nu)$ est un **ensemble invariant** pour le mouvement relatif autonome des satellites
- l'ensemble $S(\nu)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

Choisir les conditions finales du rendez-vous dans $S(\nu)$?



Mouvement relatif périodique

Mouvement périodique: $d_4 = 0 \implies M(\nu_1)X_1 = 0$

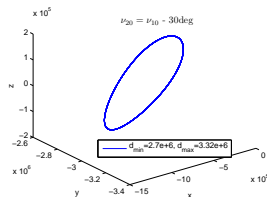
L'ensemble des états appartenant à des **trajectoires périodiques** est défini par:

$$S(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0\}$$

- $S(\nu)$ est un **ensemble invariant** pour le mouvement relatif autonome des satellites
- l'ensemble $S(\nu)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

Choisir les conditions finales du rendez-vous dans $S(\nu)$?

- $S(\nu)$ contient toutes les trajectoires périodiques, sans restrictions sur leur dimension;



Mouvement relatif périodique

Mouvement périodique: $d_4 = 0 \implies M(\nu_1)X_1 = 0$

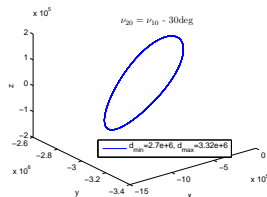
L'ensemble des états appartenant à des **trajectoires périodiques** est défini par:

$$S(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0\}$$

- $S(\nu)$ est un **ensemble invariant** pour le mouvement relatif autonome des satellites
- l'ensemble $S(\nu)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

Choisir les conditions finales du rendez-vous dans $S(\nu)$?

- $S(\nu)$ contient toutes les trajectoires périodiques, sans restrictions sur leur dimension;
- essayer de caractériser des sous ensembles intéressants de $S(\nu)$.



- 1 Dynamique linéarisée des satellites
- 2 Trajectoires périodiques contraintes
- 3 Guidage en mouvement périodique de proximité
 - Le cas nominal
 - Prise en compte des incertitudes de navigation
- 4 Exemples
- 5 Conclusion

Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

L'ensemble des états appartenant à une **trajectoire périodique spécifiée**:

$$S_D(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0, C(\nu)X(\nu) = D\}$$

Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

L'ensemble des états appartenant à une **trajectoire périodique spécifiée**:

$$S_D(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0, C(\nu)X(\nu) = D\}$$

Comment choisir un vecteur de paramètres D d'une trajectoire intéressante?

Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

L'ensemble des états appartenant à une **trajectoire périodique spécifiée**:

$$S_D(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0, C(\nu)X(\nu) = D\}$$

Comment choisir un vecteur de paramètres D d'une trajectoire intéressante?

L'ensemble des états appartenant à des trajectoires périodiques contenues à l'intérieur d'un **polytope** donné:

$$S_{HV}(\nu) = \left\{ X(\nu) \mid \begin{array}{l} M(\nu)X(\nu) = 0 \\ H\Phi(\nu, \bar{\nu})X(\nu) \leq V_k, \forall \bar{\nu} \geq \nu \end{array} \right\}$$

Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

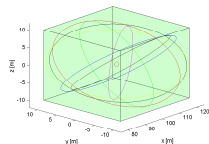
L'ensemble des états appartenant à une **trajectoire périodique spécifiée**:

$$S_D(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0, C(\nu)X(\nu) = D\}$$

Comment choisir un vecteur de paramètres D d'une trajectoire intéressante?

L'ensemble des états appartenant à des trajectoires périodiques contenues à l'intérieur d'un **polytope** donné:

$$S_{HV}(\nu) = \left\{ X(\nu) \mid \begin{array}{l} M(\nu)X(\nu) = 0 \\ H\Phi(\nu, \bar{\nu})X(\nu) \leq V_k, \forall \bar{\nu} \geq \nu \end{array} \right\}$$



Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

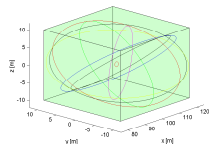
L'ensemble des états appartenant à une **trajectoire périodique spécifiée**:

$$S_D(\nu) = \{X(\nu) \mid M(\nu)X(\nu) = 0, C(\nu)X(\nu) = D\}$$

Comment choisir un vecteur de paramètres D d'une trajectoire intéressante?

L'ensemble des états appartenant à des trajectoires périodiques contenues à l'intérieur d'un **polytope** donné:

$$S_{HV}(\nu) = \left\{ X(\nu) \mid \begin{array}{l} M(\nu)X(\nu) = 0 \\ H\Phi(\nu, \bar{\nu})X(\nu) \leq V_k, \forall \bar{\nu} \geq \nu \end{array} \right\}$$



- une **infinité** d'inégalités à vérifier;
- **discrétisation** et propagation explicite de la trajectoire \implies pas de garantie entre les instants de discrétisation, pas de caractérisation paramétrique.

Rationalisation des contraintes sur la trajectoire

Ensemble $S_{HV}(\nu)$ défini par des inégalités trigonométriques



Changement de variable:

$$w = \tan\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad \cos \nu = \frac{1-w^2}{1+w^2} \quad \sin \nu = \frac{2w}{1+w^2}$$



Ensemble $S_{HV}(w)$ défini par des inégalités rationnelles



Ensemble $S_{HV}(w)$ défini par des polynômes non négatifs

$$\Gamma_i(w) \geq 0, \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

L'ensemble invariant $S_{HV}(\nu)$ peut s'écrire comme:

$$S_{HV}(\nu) = \left\{ X(\nu) \mid \begin{array}{l} M(\nu)X(\nu) = 0 \\ \Gamma_i(w) \geq 0, \gamma_i = f(D, H, V) \end{array}, \forall w \in \mathbb{R}, i = \dim(H) \right\}$$

Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

L'ensemble invariant $S_{HV}(\nu)$ peut s'écrire comme:

$$S_{HV}(\nu) = \left\{ X(\nu) \mid \begin{array}{l} M(\nu)X(\nu) = 0 \\ \Gamma_i(w) \geq 0, \gamma_i = f(D, H, V) \end{array}, \forall w \in \mathbb{R}, i = \dim(H) \right\}$$

- description **paramétrique** de l'ensemble S_{HV} ;
- donne des **garanties théoriques** sur les trajectoires de l'ensemble;
- toujours un nombre **infini** de contraintes à vérifier.

Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

L'ensemble invariant $S_{HV}(\nu)$ peut s'écrire comme:

$$S_{HV}(\nu) = \left\{ X(\nu) \mid \begin{array}{l} M(\nu)X(\nu) = 0 \\ \Gamma_i(w) \geq 0, \gamma_i = f(D, H, V) \end{array}, \forall w \in \mathbb{R}, i = \dim(H) \right\}$$

- description **paramétrique** de l'ensemble S_{HV} ;
- donne des **garanties théoriques** sur les trajectoires de l'ensemble;
- toujours un nombre **infini** de contraintes à vérifier.

$$\Gamma(w) \geq 0, \forall w \in \mathbb{R} \text{ ssi } \exists Y \succeq 0 \text{ t.q. } \gamma = \Lambda^*(Y)$$

Caractérisation des trajectoires périodiques contraintes

L'ensemble invariant $S_{HV}(\nu)$ peut s'écrire comme:

$$S_{HV}(\nu) = \left\{ X(\nu) \mid \begin{array}{l} M(\nu)X(\nu) = 0 \\ \Gamma_i(w) \geq 0, \gamma_i = f(D, H, V) \end{array}, \forall w \in \mathbb{R}, i = \dim(H) \right\}$$

- description **paramétrique** de l'ensemble S_{HV} ;
- donne des **garanties théoriques** sur les trajectoires de l'ensemble;
- toujours un nombre **infini** de contraintes à vérifier.

$$\Gamma(w) \geq 0, \forall w \in \mathbb{R} \text{ ssi } \exists Y \succeq 0 \text{ t.q. } \gamma = \Lambda^*(Y)$$

Tester l'appartenance de l'état à une trajectoire périodique admissible revient à tester l'existence d'une matrice SDP [Nesterov2000]:

$$S_{HV}(\nu) = \left\{ X(\nu) \mid \begin{array}{l} M(\nu)X(\nu) = 0 \\ \exists Y_i \succeq 0 \text{ t.q. } \gamma_i(w) = \Lambda^*(Y_i), \gamma_i = f(D, H, V) \end{array} \right\}$$

- 1 Dynamique linéarisée des satellites
- 2 Trajectoires périodiques contraintes
- 3 **Guidage en mouvement périodique de proximité**
 - Le cas nominal
 - Prise en compte des incertitudes de navigation
- 4 Exemples
- 5 Conclusion

Guidage en mouvement périodique de proximité

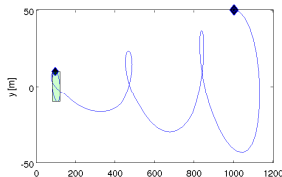
Problème de guidage: rallier un état appartenant à S_{HV} à partir d'un état initial donné X_1 , en appliquant N impulsions ΔV_i , à des instants fixés ν_1, \dots, ν_N .

$$\begin{array}{l} \min_{\Delta V_k} \quad \sum_{k=1}^N |\Delta V_k| \\ \text{t.q.} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Delta V_i| \leq \Delta \bar{V} \\ X(\nu_1) = X_1 \\ X(\nu_{k+1}) = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})(X(\nu_k) + B\Delta V_k) \\ X_N \in S_{HV}(\nu_N) \end{array} \right. \end{array}$$

Guidage en mouvement périodique de proximité

Problème de guidage: rallier un état appartenant à S_{HV} à partir d'un état initial donné X_1 , en appliquant N impulsions ΔV_i , à des instants fixés ν_1, \dots, ν_N .

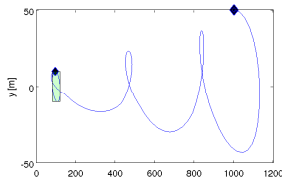
$$\begin{aligned} \min_{\Delta V_k} \quad & \sum_{k=1}^N |\Delta V_k| \\ \text{t.q.} \quad & \begin{cases} |\Delta V_i| \leq \Delta \bar{V} \\ X(\nu_1) = X_1 \\ X(\nu_{k+1}) = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})(X(\nu_k) + B\Delta V_k) \\ X_N \in S_{HV}(\nu_N) \end{cases} \end{aligned}$$



Guidage en mouvement périodique de proximité

Problème de guidage: rallier un état appartenant à S_{HV} à partir d'un état initial donné X_1 , en appliquant N impulsions ΔV_i , à des instants fixés ν_1, \dots, ν_N .

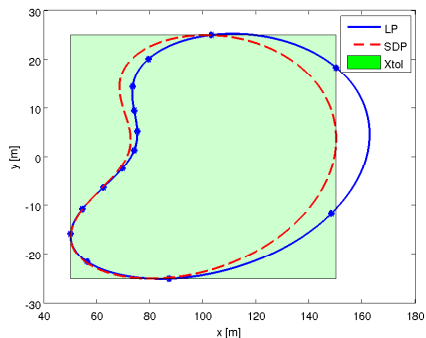
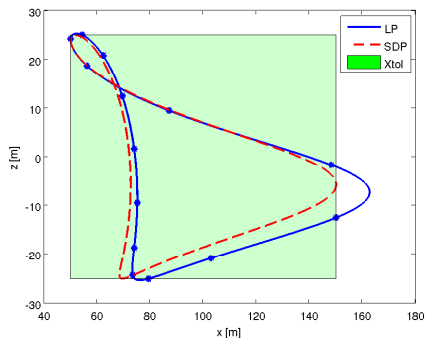
$$\begin{aligned} \min_{\Delta V_k} \quad & \sum_{k=1}^N |\Delta V_k| \\ \text{t.q.} \quad & \begin{cases} |\Delta V_i| \leq \Delta \bar{V} \\ X(\nu_1) = X_1 \\ X(\nu_{k+1}) = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})(X(\nu_k) + B\Delta V_k) \\ X_N \in S_{HV}(\nu_N) \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \min_{\Delta V_k, Z_k} \quad & \sum_{k=1}^N Z_k \\ \text{t.q.} \quad & \begin{cases} -Z_k \leq \Delta V_k \leq Z_k, \quad k = 1..N \\ Z_k \leq \Delta \bar{V} \\ X(\nu_N) = \Phi(\nu_1, \nu_N)X_1 + \sum_{k=1}^N \Phi(\nu_k, \nu_N)B\Delta V_k \\ M(\nu_N)X(\nu_N) = 0 \\ \exists Y_i \succeq 0, \text{ t.q. } \gamma_i = \Lambda^*(Y_i), \quad i = 1..6 \\ \gamma_i = f_i(\Delta V, H, V) \end{cases} \end{aligned}$$

Guidage en mouvement périodique de proximité

Comparaison entre la méthode présentée et une méthode basée sur la discrétisation des contraintes:



Les **incertitudes de mesure** sur l'état initial se propagent en **boucle ouverte** sur toute la longueur de l'horizon de prédiction:

$$X_i = \Phi(\nu_1, \nu_i)(X_1 + \Delta X_1) + \sum_{k=1}^i \Phi(\nu_k, \nu_i)B\Delta V_k + \Delta X_i, \quad i = 1..N$$

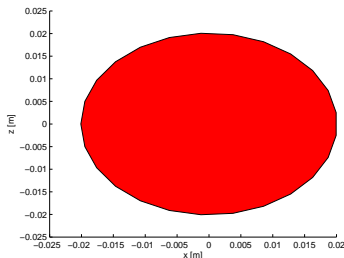
- pas de contrôle sur la taille de l'ensemble atteignable;
- pas de garantie de **faisabilité réursive**;
- impose un horizon de prédiction **court** pour pouvoir garantir une certaine précision;
- approche très **conservative**.

Prise en compte des incertitudes de navigation

Les **incertitudes de mesure** sur l'état initial se propagent en **boucle ouverte** sur toute la longueur de l'horizon de prédiction:

$$X_i = \Phi(\nu_1, \nu_i)(X_1 + \Delta X_1) + \sum_{k=1}^i \Phi(\nu_k, \nu_i) B \Delta V_k + \Delta X_i, \quad i = 1..N$$

- pas de contrôle sur la taille de l'ensemble atteignable;
- pas de garantie de **faisabilité réursive**;
- impose un horizon de prédiction **court** pour pouvoir garantir une certaine précision;
- approche très **conservative**.

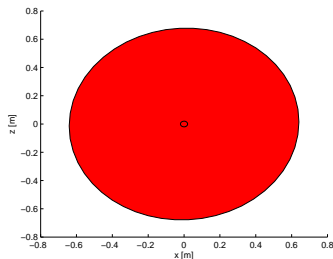


Prise en compte des incertitudes de navigation

Les **incertitudes de mesure** sur l'état initial se propagent en **boucle ouverte** sur toute la longueur de l'horizon de prédiction:

$$X_i = \Phi(\nu_1, \nu_i)(X_1 + \Delta X_1) + \sum_{k=1}^i \Phi(\nu_k, \nu_i) B \Delta V_k + \Delta X_i, \quad i = 1..N$$

- pas de contrôle sur la taille de l'ensemble atteignable;
- pas de garantie de **faisabilité réursive**;
- impose un horizon de prédiction **court** pour pouvoir garantir une certaine précision;
- approche très **conservative**.

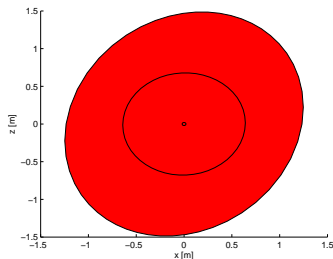


Prise en compte des incertitudes de navigation

Les **incertitudes de mesure** sur l'état initial se propagent en **boucle ouverte** sur toute la longueur de l'horizon de prédiction:

$$X_i = \Phi(\nu_1, \nu_i)(X_1 + \Delta X_1) + \sum_{k=1}^i \Phi(\nu_k, \nu_i) B \Delta V_k + \Delta X_i, \quad i = 1..N$$

- pas de contrôle sur la taille de l'ensemble atteignable;
- pas de garantie de **faisabilité réursive**;
- impose un horizon de prédiction **court** pour pouvoir garantir une certaine précision;
- approche très **conservative**.

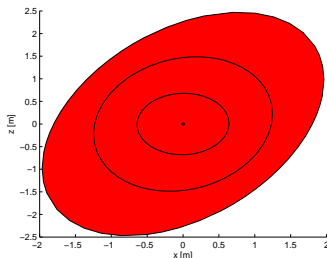


Prise en compte des incertitudes de navigation

Les **incertitudes de mesure** sur l'état initial se propagent en **boucle ouverte** sur toute la longueur de l'horizon de prédiction:

$$X_i = \Phi(\nu_1, \nu_i)(X_1 + \Delta X_1) + \sum_{k=1}^i \Phi(\nu_k, \nu_i)B\Delta V_k + \Delta X_i, \quad i = 1..N$$

- pas de contrôle sur la taille de l'ensemble atteignable;
- pas de garantie de **faisabilité réursive**;
- impose un horizon de prédiction **court** pour pouvoir garantir une certaine précision;
- approche très **conservative**.

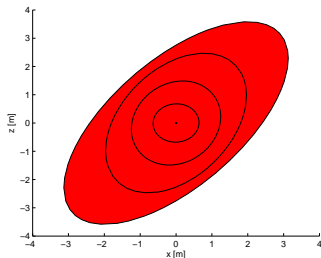


Prise en compte des incertitudes de navigation

Les **incertitudes de mesure** sur l'état initial se propagent en **boucle ouverte** sur toute la longueur de l'horizon de prédiction:

$$X_i = \Phi(\nu_1, \nu_i)(X_1 + \Delta X_1) + \sum_{k=1}^i \Phi(\nu_k, \nu_i) B \Delta V_k + \Delta X_i, \quad i = 1..N$$

- pas de contrôle sur la taille de l'ensemble atteignable;
- pas de garantie de **faisabilité réursive**;
- impose un horizon de prédiction **court** pour pouvoir garantir une certaine précision;
- approche très **conservative**.



Contrôle de la dynamique des erreurs

Soit $A_k = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})$ et $B_k = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})B$, la dynamique relative des satellites entre deux impulsions est donnée par:

$$\bar{X}_{k+1} = A_k \bar{X}_k + B_k \Delta V_k$$

En présence d'incertitudes de navigation

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A_k(X_k + \Delta X_k) + B_k U_k + \Delta X_{k+1}, \quad \Delta X_i \in E(0, Q_i) \\ w_k &= A_k \Delta X_k + \Delta X_{k+1} \in E(0, Q_w^k) \end{aligned}$$

Contrôle de la dynamique des erreurs

Soit $A_k = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})$ et $B_k = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})B$, la dynamique relative des satellites entre deux impulsions est donnée par:

$$\bar{X}_{k+1} = A_k \bar{X}_k + B_k \Delta V_k$$

En présence d'incertitudes de navigation

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A_k(X_k + \Delta X_k) + B_k U_k + \Delta X_{k+1}, \quad \Delta X_i \in E(0, Q_i) \\ w_k &= A_k \Delta X_k + \Delta X_{k+1} \in E(0, Q_w^k) \end{aligned}$$

Ajouter un terme explicite de retour d'information dans la commande:

$$U_k = K_k(X_k - \bar{X}_k) + \Delta V_k$$

Contrôle de la dynamique des erreurs

Soit $A_k = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})$ et $B_k = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})B$, la dynamique relative des satellites entre deux impulsions est donnée par:

$$\bar{X}_{k+1} = A_k \bar{X}_k + B_k \Delta V_k$$

En présence d'incertitudes de navigation

$$X_{k+1} = A_k(X_k + \Delta X_k) + B_k U_k + \Delta X_{k+1}, \Delta X_i \in E(0, Q_i) \\ w_k = A_k \Delta X_k + \Delta X_{k+1} \in E(0, Q_w^k)$$

Ajouter un terme explicite de retour d'information dans la commande:

$$U_k = K_k(X_k - \bar{X}_k) + \Delta V_k$$

La dynamique de l'erreur $e_k = X_k - \bar{X}_k$ est alors donnée par:

$$e_{k+1} = (A_k + B_k K_k)e_k + w_k$$

Contrôle de la dynamique des erreurs

Soit $A_k = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})$ et $B_k = \Phi(\nu_k, \nu_{k+1})B$, la dynamique relative des satellites entre deux impulsions est donnée par:

$$\bar{X}_{k+1} = A_k \bar{X}_k + B_k \Delta V_k$$

En présence d'incertitudes de navigation

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A_k(X_k + \Delta X_k) + B_k U_k + \Delta X_{k+1}, \quad \Delta X_i \in E(0, Q_i) \\ w_k &= A_k \Delta X_k + \Delta X_{k+1} \in E(0, Q_w^k) \end{aligned}$$

Ajouter un terme explicite de retour d'information dans la commande:

$$U_k = K_k(X_k - \bar{X}_k) + \Delta V_k$$

La dynamique de l'erreur $e_k = X_k - \bar{X}_k$ est alors donnée par:

$$e_{k+1} = (A_k + B_k K_k)e_k + w_k$$

Trouver les gains K_k qui minimisent l'erreur sur l'état à la fin de l'horizon de prédiction et une trajectoire de référence admissible

L'erreur propagée sur l'horizon de prédiction:

$$e_1 = X_1 - \bar{X}_1$$

$$e_2 = (A_1 + B_1 K_1)e_1 + w_1$$

$$e_3 = (A_2 + B_2 K_2)((A_1 + B_1 K_1)e_1 + w_1) + w_2$$

$$e_4 = (A_3 + B_3 K_3)((A_2 + B_2 K_2)((A_1 + B_1 K_1)e_1 + w_1)) + w_3$$

...

L'erreur propagée sur l'horizon de prédiction:

$$e_1 = X_1 - \bar{X}_1$$

$$e_2 = (A_1 + B_1 K_1)e_1 + w_1$$

$$e_3 = (A_2 + B_2 K_2)((A_1 + B_1 K_1)e_1 + w_1) + w_2$$

$$e_4 = (A_3 + B_3 K_3)((A_2 + B_2 K_2)((A_1 + B_1 K_1)e_1 + w_1)) + w_3$$

...

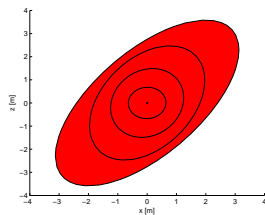
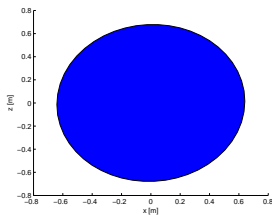
Convexification:

- choisir les gains K_k , $k = 1..N$ tels que:

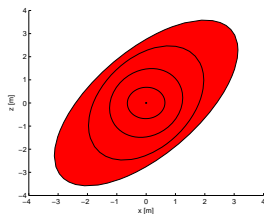
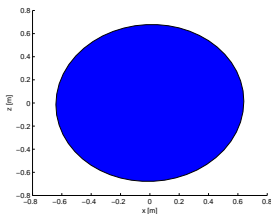
$$(A_k + B_k K_k)e_k + w_k \in E(0, Q_\alpha), \forall e_k \in E(0, Q_\alpha), \forall w_k \in E(0, Q_w^k)$$

- le choix du gain au pas k devient **indépendant** du choix des gains précédents
- l'ensemble ellipsoïdal $E(0, Q_\alpha)$ définit un **tube** autour de la trajectoire centrale \bar{X}_k
- la taille de l'ensemble d'arrivée ne dépend plus de la longueur de l'horizon de prédiction.

Minimisation de l'effet des incertitudes

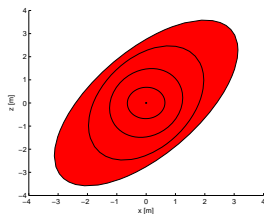
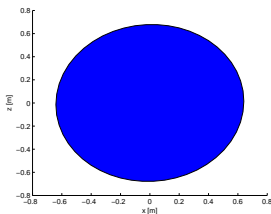


Minimisation de l'effet des incertitudes



$$(A_k + B_k K_k) e_k + w_k \in E(0, Q_\alpha), \quad \forall e_k \in E(0, Q_\alpha), \quad \forall w_k \in E(0, Q_w^k), \quad k = 1..N$$

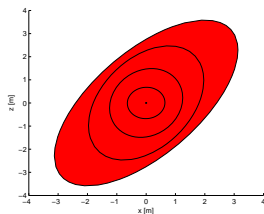
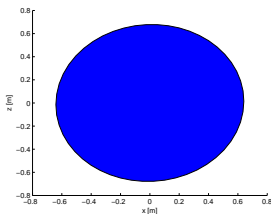
Minimisation de l'effet des incertitudes



$$(A_k + B_k K_k) e_k + w_k \in E(0, Q_\alpha), \quad \forall e_k \in E(0, Q_\alpha), \quad \forall w_k \in E(0, Q_w^k), \quad k = 1..N$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \exists \tau_k^1, \tau_k^2 \geq 0 & & & \\ 1 - \tau_k^1 - \tau_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_k^1 Q_\alpha & 0 & (A_k + B_k K_k)^T \\ 0 & 0 & \tau_k^2 Q_w^k & I_n \\ 0 & A_k + B_k K_k & I_n & Q_\alpha^{-1} \end{array} \right] \geq 0, \quad k = 1..N$$

Minimisation de l'effet des incertitudes



$$(A_k + B_k K_k) e_k + w_k \in E(0, Q_\alpha), \quad \forall e_k \in E(0, Q_\alpha), \quad \forall w_k \in E(0, Q_w^k), \quad k = 1..N$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \tau_k^1, \tau_k^2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 - \tau_k^1 - \tau_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_k^1 Q_\alpha & 0 & (A_k + B_k K_k)^T \\ 0 & 0 & \tau_k^2 Q_w^k & I_n \\ 0 & A_k + B_k K_k & I_n & Q_\alpha^{-1} \end{array} \right] \geq 0, \quad k = 1..N \end{array}}$$

Problème encore **non-convexe** si Q_α n'est pas connue.

Minimisation de l'effet des incertitudes

Le problème peut être rendu convexe pour Q_α telle que:

$$Q_\alpha = \frac{1}{\alpha^2} Q$$

$$\exists \tau_k^1, \tau_k^2 \geq 0$$
$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - \tau_k^1 \alpha^2 - \tau_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_k^1 Q & 0 & (A_k + B_k K_k)^T \\ 0 & 0 & \tau_k^2 Q_w^k & I_n \\ 0 & A_k + B_k K_k & I_n & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, k = 1..N$$

Minimisation de l'effet des incertitudes

Le problème peut être rendu convexe pour Q_α telle que:

$$Q_\alpha = \frac{1}{\alpha^2} Q$$

$$\exists \tau_k^1, \tau_k^2 \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - \tau_k^1 \alpha^2 - \tau_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_k^1 Q & 0 & (A_k + B_k K_k)^T \\ 0 & 0 & \tau_k^2 Q_w^k & I_n \\ 0 & A_k + B_k K_k & I_n & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, k = 1..N$$

Après pre- et post- multiplication par $\text{diag}(\alpha^{-1/2} I, \alpha^{1/2} I, \alpha^{-1/2} I, \alpha^{1/2} I)$:

$$L_k = \begin{bmatrix} \alpha - \hat{\tau}_k^1 - \hat{\tau}_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_k^1 Q & 0 & (\alpha A_k + B_k \hat{K}_k)^T \\ 0 & 0 & \hat{\tau}_k^2 Q_w^k & I_n \\ 0 & \alpha A_k + B_k \hat{K}_k & I_n & \alpha Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, k = 1..N$$

Minimisation de l'effet des incertitudes

Le problème peut être rendu convexe pour Q_α telle que:

$$Q_\alpha = \frac{1}{\alpha^2} Q$$

$$\exists \tau_k^1, \tau_k^2 \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - \tau_k^1 \alpha^2 - \tau_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_k^1 Q & 0 & (A_k + B_k K_k)^T \\ 0 & 0 & \tau_k^2 Q_w^k & I_n \\ 0 & A_k + B_k K_k & I_n & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, k = 1..N$$

Après pre- et post- multiplication par $\text{diag}(\alpha^{-1/2} I, \alpha^{1/2} I, \alpha^{-1/2} I, \alpha^{1/2} I)$:

$$L_k = \begin{bmatrix} \alpha - \hat{\tau}_k^1 - \hat{\tau}_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_k^1 Q & 0 & (\alpha A_k + B_k \hat{K}_k)^T \\ 0 & 0 & \hat{\tau}_k^2 Q_w^k & I_n \\ 0 & \alpha A_k + B_k \hat{K}_k & I_n & \alpha Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, k = 1..N$$

Permet d'optimiser à la fois le gain de retour d'état et la taille de l'ensemble invariant correspondant!

- 1 Dynamique linéarisée des satellites
- 2 Trajectoires périodiques contraintes
- 3 Guidage en mouvement périodique de proximité
 - Le cas nominal
 - Prise en compte des incertitudes de navigation
- 4 Exemples
- 5 Conclusion

Les gains K_k et leur influence sur l'ensemble d'arrivée

Tous les gains K_k , $k = 1..N$ peuvent être calculés avec un seul SDP:

$$\begin{array}{ll} \min_{\alpha, K_k} & \alpha \\ \text{t.q.} & \begin{cases} \exists \hat{\tau}_k^1, \hat{\tau}_k^2 \geq 0 \\ L_k \geq 0 \end{cases}, k = 1..N \end{array}$$

Les gains K_k et leur influence sur l'ensemble d'arrivée

Tous les gains K_k , $k = 1..N$ peuvent être calculés avec un seul SDP:

$$\begin{array}{ll} \min_{\alpha, K_k} & \alpha \\ \text{t.q.} & \begin{cases} \exists \hat{\tau}_k^1, \hat{\tau}_k^2 \geq 0 \\ L_k \geq 0 \end{cases}, k = 1..N \end{array}$$

Pour une mission ATV définie par:

e	a [km]	N	ΔV_{\max} [m/s]	t_1 [s]	X_1 [km;m/s]	X_f [m;m/s]
0.0052	6 763	10	5	0	[-1,0,1,0,0,0]	[0,0,-50,0,0,0]

Pour $\delta p = 0.02$ m et $\delta v = 0.002$ m/s, la taille de l'ensemble d'arrivée Q_α est:

Horizon de prédiction	T/2	T	2T	2.5 T
Approche en boucle fermée [m]	1	2.15	6.15	infeas
Approche classique en b.o. [m]	23	35.66	71.25	88.77

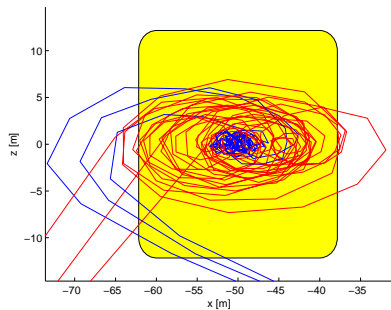
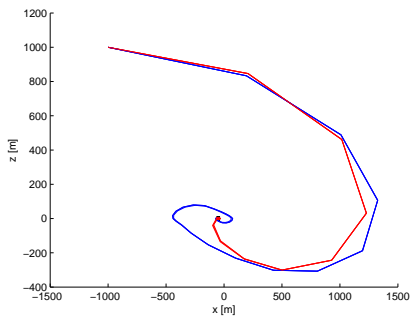
$$U_k = K_k(X_k - \bar{X}_k) + \Delta V_k$$

Une fois les gains K_k et l'ensemble Q_α calculés il reste à trouver les ΔV_k qui définissent la trajectoire centrale:

$$\begin{array}{l} \min_{\Delta V_k, \bar{X}_k} \quad \sum_{k=1}^N |U_k| \\ \text{t.q.} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{X}_1 - X_1)^T Q_\alpha (\bar{X}_1 - X_1) \leq 1 \\ U_k = K_k e_k + \Delta V_k, e_k \in E(0, Q_\alpha) \\ |U_k| \leq U_{\max} - \max(K_k e_k), \forall e_k \in E(0, Q_\alpha) \\ \bar{X}_{k+1} = A_k \bar{X}_k + B_k \Delta V_k \\ \bar{X}_N \in S_{HV}(\nu_N) \end{array} \right. \end{array}$$

- minimiser le coût pire-cas;
- serrer les contraintes de saturation;
- l'état initial \bar{X}_1 est une variable de décision.

Résultats de simulation en boucle fermée



- 1 Dynamique linéarisée des satellites
- 2 Trajectoires périodiques contraintes
- 3 Guidage en mouvement périodique de proximité
 - Le cas nominal
 - Prise en compte des incertitudes de navigation
- 4 Exemples
- 5 Conclusion

- Caractérisations paramétrique des trajectoires périodiques des satellites contraintes à évoluer à l'intérieur d'un polytope;
- Utilisation de cet ensemble invariant comme ensemble final dans le schéma de commande prédictive pour le rendez-vous orbital (ACC 2012);
- Utilisation de cet ensemble invariant pour assurer la sécurité passive des trajectoires de rendez-vous (CIFA 2012);
- Prise en compte des incertitudes de navigation;
- Commande prédictive basée sur de tubes pour avoir une estimation réaliste de la précision finale en présence des incertitudes;
- Schéma avec des garanties de faisabilité récursive