

Commande à horizon glissant d'un système

d'équations aux dérivées partielles non linéaires :

Commande d'un réacteur à inversion de flux.

Par : **Pascal Dufour**, LAGEP & **Youssefi Touré**, LVR

Groupe de Travail "Commande Prédictive Non Linéaire", Paris, 20 février 2003

Contexte de l'étude

2 Constats :

↪ 1. Conduite de procédés de plus en plus complexe : nécessité d'une **description** de plus en plus fine via des **modèles** de plus en plus complexes :

- aspect dynamique
- comportements physiques non linéaires
- **variables indépendantes d'espace**

↪ prise en compte de systèmes **non linéaires d'équations aux dérivées partielles.**

↪ 2. La **stratégie de commande prédictive** est un des outils (l'outil ?) de **commande avancée** très utilisé en milieu industriel.

Objectifs

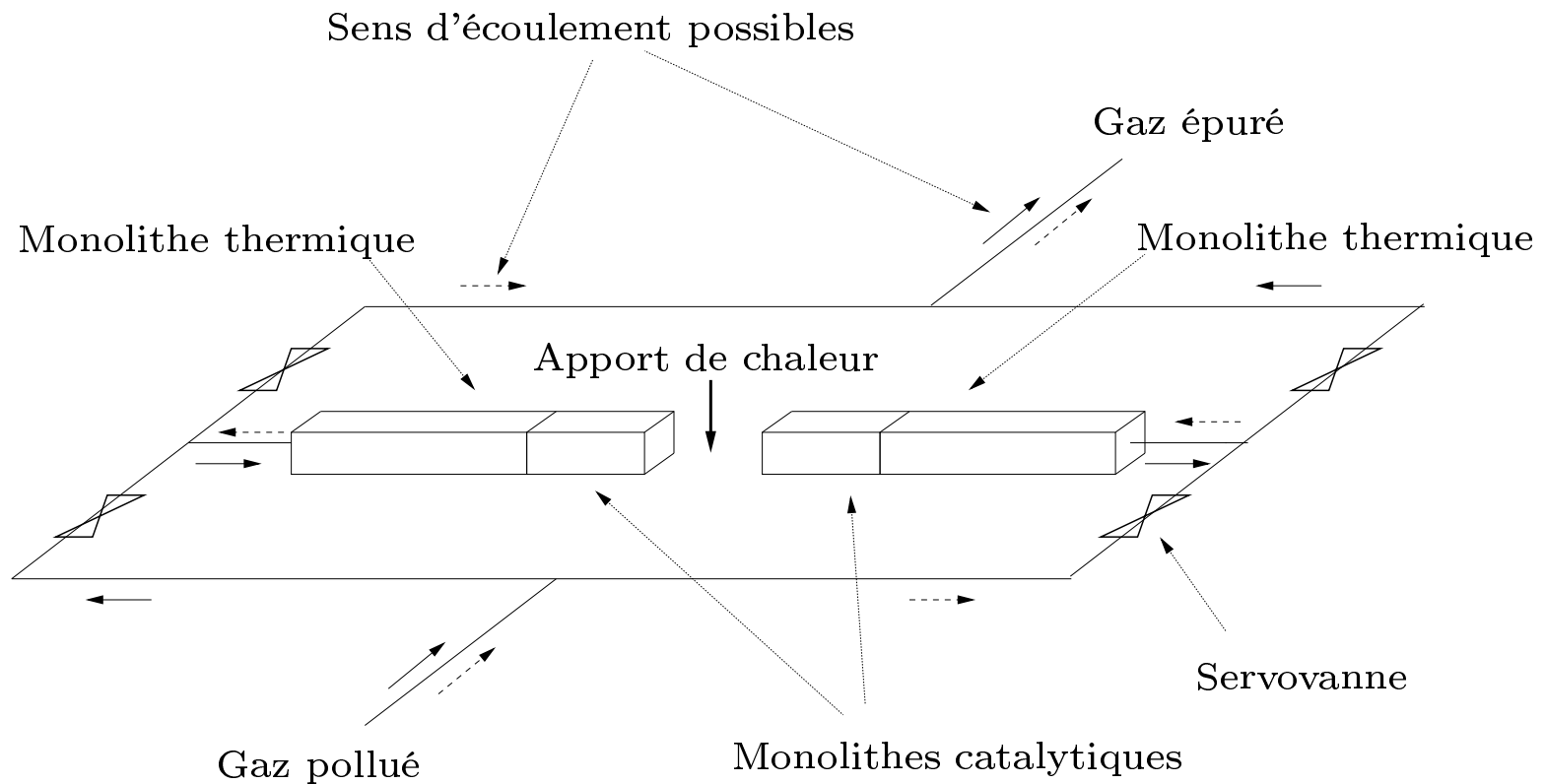
Étendre l'utilisation de la stratégie de **commande prédictive** de systèmes décrits par des **équations aux dérivées ordinaires** à des systèmes décrits par des **équations aux dérivées partielles** .

Plan

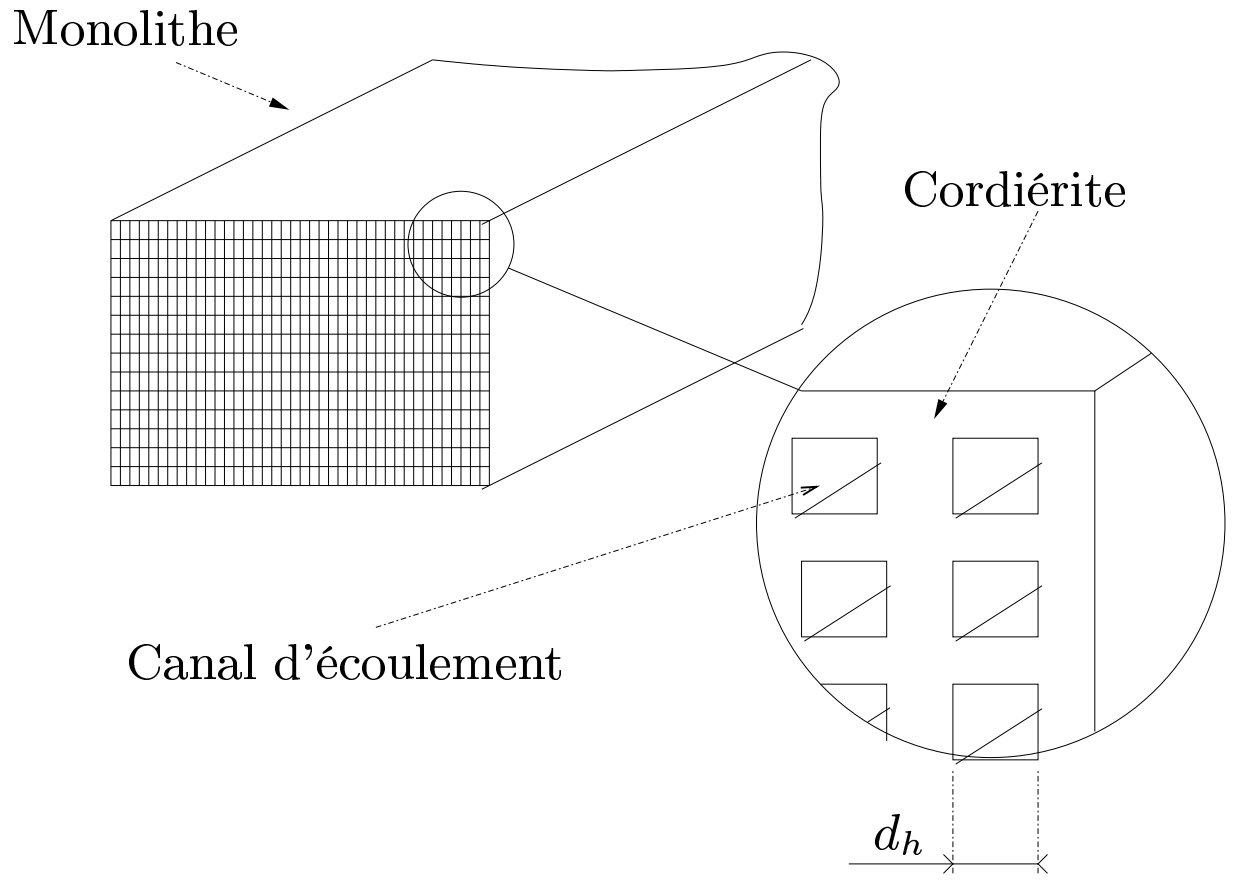
1. Le procédé : **réacteur catalytique à inversion de flux**
 - Modèle
 - Résultats en simulation de commande en boucle ouverte
 - Objectifs de commande
2. **Stratégie de commande prédictive**
 - Structure de commande
 - Optimisation sous contraintes
3. **Commande monovariante**
 - Résultats de simulation et nouveau problème induit
4. **Commande multivariante**
 - Nouvelle commande et nouveau modèle
 - Résultats de simulation
5. Conclusion et perspective

Réacteur catalytique à inversion de flux

[Ramdani, thèse LGPC, 2000][Edouard, thèse LGPC-LAGEP, 200?]

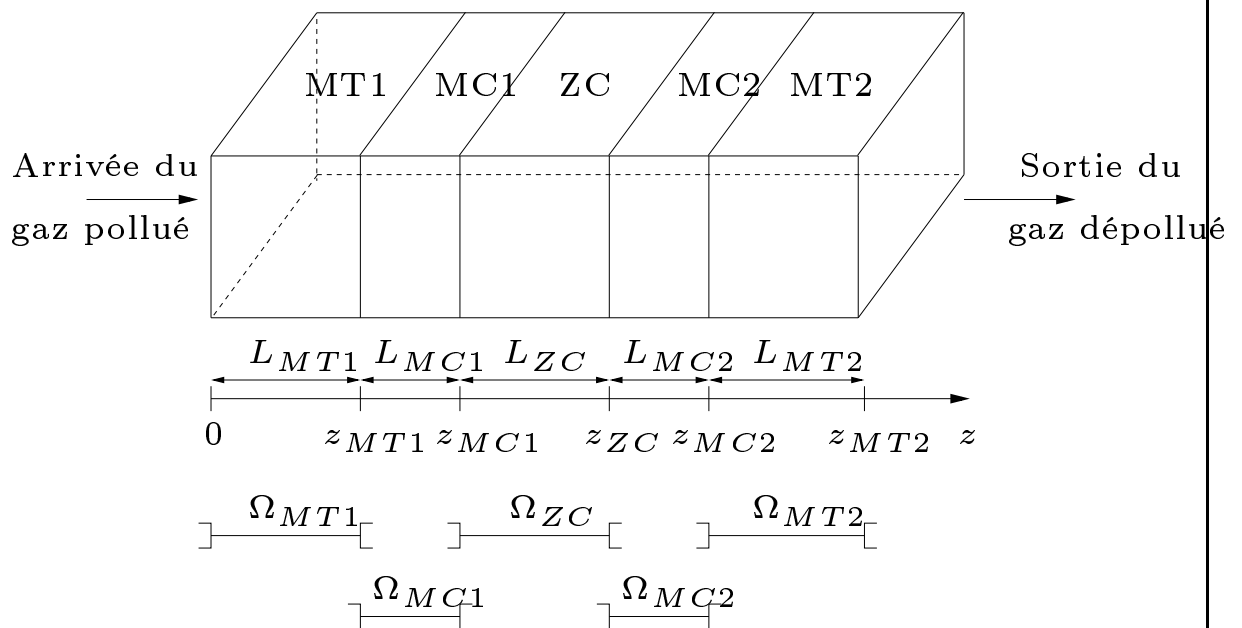


Réacteur à inversion de flux : vue en coupe



Modélisation : hypothèses

1. On considère 2 variables indépendantes : le temps t et la **direction d'écoulement** z .
2. On considère les états : la température T_g et concentration C_g du gaz dans les canaux d'écoulement ; T_s et C_s dans la partie solide.
3. On considère **5 domaines spatiaux** et 6 conditions aux limites : 44 équations.



4. Pas de pertes (notamment dans la partie centrale).
5. **Phénomènes instantanés** par rapport à la dynamique de la température dans le solide.

Modèle : quelques éléments

- pour $z \in \Omega_{MT1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{h a_c}{u_g \rho_g c_{p_g}} (T_s - T_g) \\ C_g = C_g(0, t) \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_{st} c_{p_s}} \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} + \frac{h a_c}{(1-\varepsilon) \rho_{st} c_{p_s}} (T_g - T_s) \\ C_s = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

- pour $z \in \Omega_{MC1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{h a_c}{u_g \rho_g c_{p_g}} (T_s - T_g) \\ \frac{\partial C_g}{\partial z} = \frac{k_d a_c}{u_g} (C_s - C_g) \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_{sc} c_{p_s}} \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} + \frac{h a_c}{(1-\varepsilon) \rho_{st} c_{p_s}} (T_g - T_s) + \frac{(-\Delta H_r) k^\infty a_c}{(1-\varepsilon) \rho_{sc} c_{p_s}} e^{\frac{-E_a}{RT_s}} C_s \\ C_s = \frac{1}{1 + \frac{k^\infty}{k_d} e^{\frac{-E_a}{RT_s}}} C_g \end{array} \right. \quad (2)$$

- pour $z \in \Omega_{ZC}$, la commande P_{res} intervient :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{1}{nb_c d_h^2 u_g \rho_g c_{pg} L_{ZC}} P_{res} \\ C_g = C_g(z_{MC1}, t) \end{cases} \quad (3)$$

- A la fin du demi-cycle, l'**inversion du sens de circulation** se traduit en un basculement de l'état (L_{tot} = longueur totale de l'ensemble du réacteur) :

$$\begin{cases} T_g(z, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}) = T_g(L_{tot} - z, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}^-) \\ C_g(z, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}) = C_g(L_{tot} - z, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}^-) \\ T_s(z, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}) = T_s(L_{tot} - z, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}^-) \\ C_s(z, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}) = C_s(L_{tot} - z, t_0 + \frac{T_{cycle}}{2}^-) \end{cases} \quad (4)$$

- le système d'équations du premier demi-cycle est de nouveau utilisé pour le deuxième demi-cycle ...

- ... jusqu'à l'inversion du sens de circulation en fin de cycle :

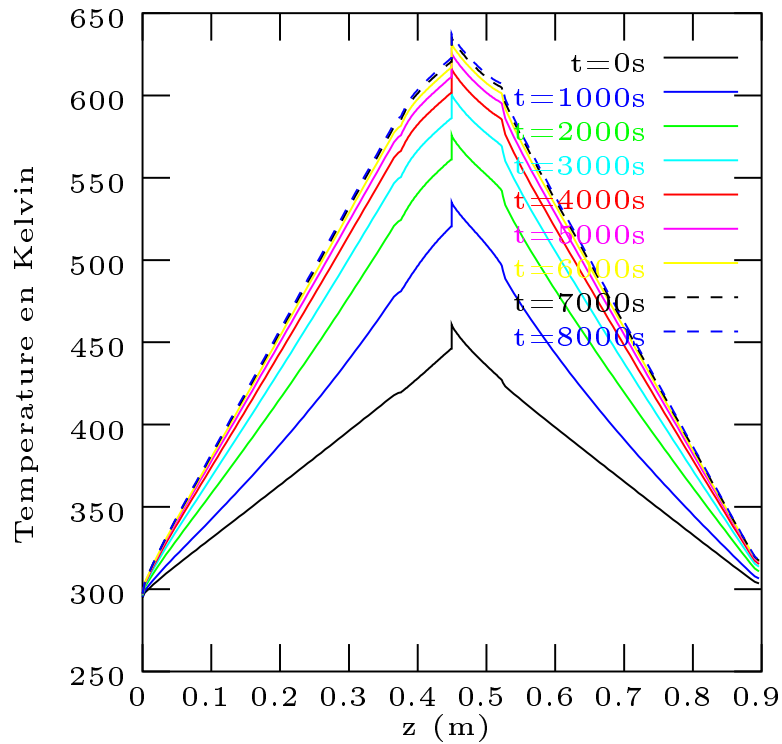
$$\left\{ \begin{array}{l} T_g(z, t_0 + T_{cycle}) = T_g(L_{tot} - z, t_0 + T_{cycle}^-) \\ C_g(z, t_0 + T_{cycle}) = C_g(L_{tot} - z, t_0 + T_{cycle}^-) \\ T_s(z, t_0 + T_{cycle}) = T_s(L_{tot} - z, t_0 + T_{cycle}^-) \\ C_s(z, t_0 + T_{cycle}) = C_s(L_{tot} - z, t_0 + T_{cycle}^-) \end{array} \right. \quad (5)$$

- Un nouveau cycle commence alors.

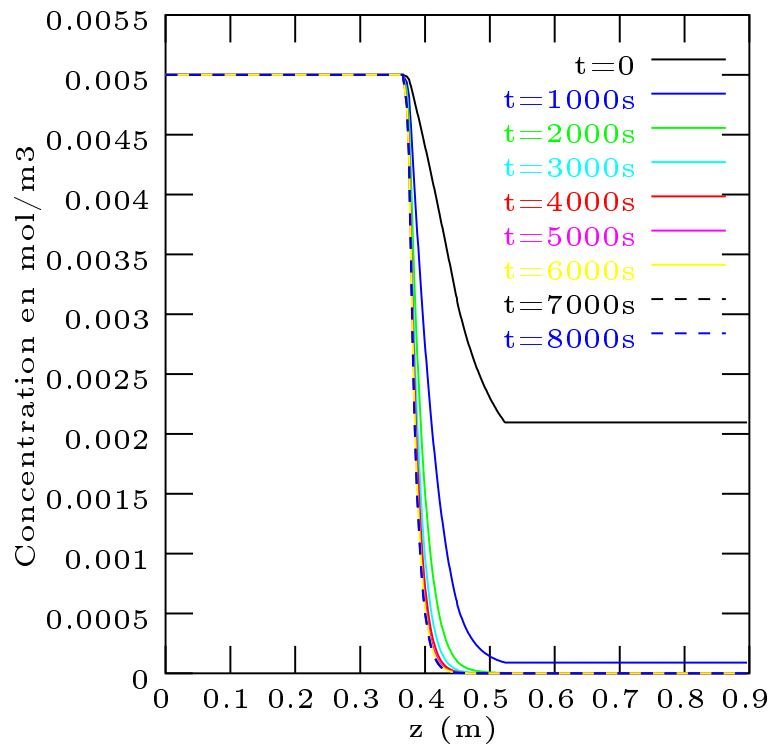
Simulation du procédé en boucle ouverte

- Pour une bonne représentation, la “numérisation” du procédé (volumes finis) mène à un système de **800 équations** algébro différentielles,
 - la durée d’un cycle est 20s et la **période d’échantillonnage** est de **10s**,
 - avant utilisation, on effectue un **préchauffage du réacteur** sans gaz à **520W** pendant 300 cycles.
 - caractéristique du fonctionnement du réacteur en boucle ouverte : pendant 400 cycles, on amène 520W au coeur. Pour le **gaz à l’entrée** :
$$C_g(0, t) = 5 \times 10^{-3} \text{mol.m}^{-3}, T_g(0, t) = 20^\circ\text{C}, u_g = 100 \text{m}^3.\text{h}^{-1}$$
- ↪ la fréquence de calcul pour la résolution de ce modèle (à utiliser dans la méthode de commande prédictive) est alors de **18Hz** (avec PC à **500MHz**) : **temps de calcul de la commande sera problématique !!**

Simulation en boucle ouverte



T_g : évolution temporelle du profil spatial



C_g : évolution temporelle du profil spatial

Objectifs de commande pour ce réacteur

1. Dans une **première approche** :

- Assurer que la moyenne de la **concentration** de polluant en sortie soit **inférieure à un maximum fixé** pour assurer la dépollution :

$$C_{g.sortie}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t C_g(z_{MT2}, \tau) d\tau \leq C_{g.max}$$

- **Minimiser** l'apport d'énergie électrique.

⇒ une approche **monovariante** est suffisante.

2. Dans une **seconde approche**, on ajoute à cela de nouvelles contraintes :

- Assurer que la **température** dans le réacteur reste **inférieure à un maximum** pour préserver les éléments catalytiques.
- **Maximiser** la quantité de gaz traité.

⇒ nécessité d'une approche **multivariante**.

3. Et avec $C_g(0, t)$ variant **aléatoirement** dans un intervalle donné.

Problème initial d'optimisation

contraint à résoudre en ligne

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} g(y_{ref}(j), y_p(j), u(j-1)) \\ \tilde{u} = [u(k) \dots u(k + N_c - 1)]^T \\ c_i(y_{ref}(j), y_p(j), u(j-1)) \leq 0 \quad (i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, n_{co}\}) \end{array} \right. \quad (6)$$

Classe formelle de systèmes

considérés

$$(\mathcal{S}_{NL}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = F_d(x) \text{ sur } \Omega \times]0, +\infty[\\ F_b(x, u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ y_m = Cx \text{ sur } \bar{\Omega} \times]0, +\infty[\\ x(z, 0) = x_i(z) \text{ avec } z \in \bar{\Omega} \end{array} \right. \quad (7)$$

avec les opérateurs F_d et F_b :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_d(.) = \left| \begin{array}{l} A + f(.) \text{ pour } (\mathcal{S}_1) \\ A(., \nabla.) \text{ pour } (\mathcal{S}_2) \end{array} \right. \\ F_b(., u) = \left| \begin{array}{l} h(., u) + B \text{ pour } (\mathcal{S}_1) \\ h(., u) + B(., \nabla.) \text{ pour } (\mathcal{S}_2) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (8)$$

Commande en temps réel :

modèle de variation

En **linéarisant** le modèle autour de (\mathcal{S}_0) caractérisé par (u_0, x_0, y_0) , la définition des variations vérifiant :

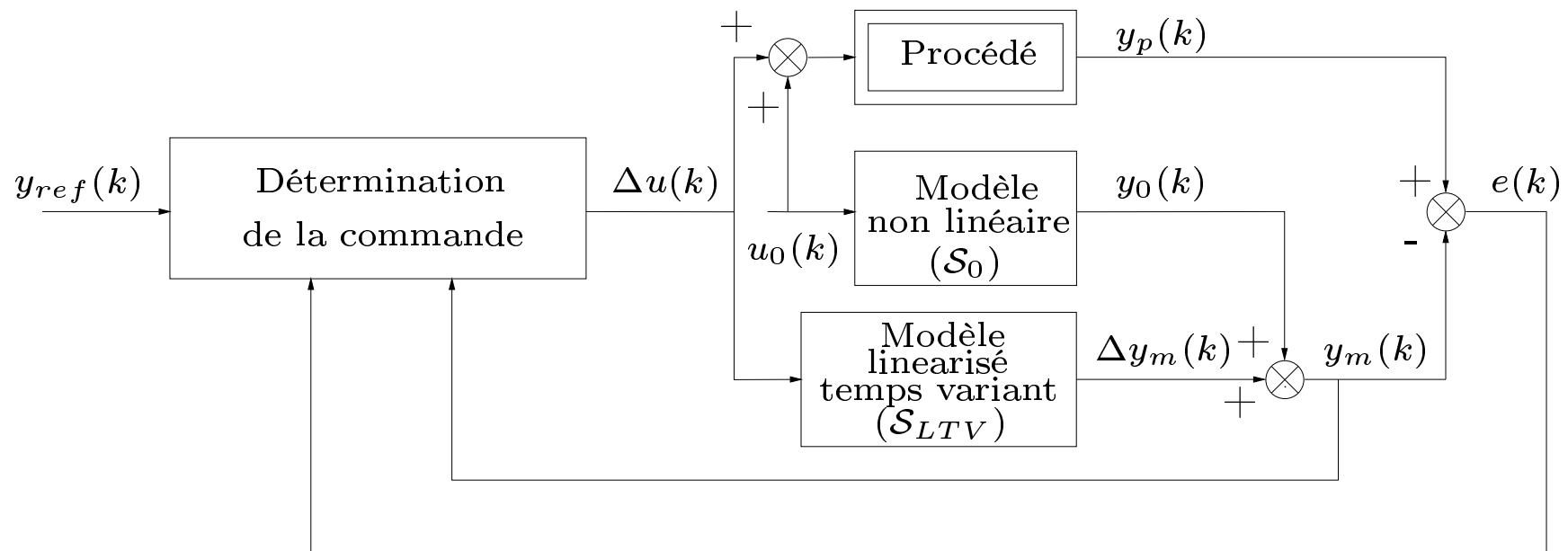
$$\begin{cases} u(k) = u_0(k) + \Delta u(k) \\ x(k) = x_0(k) + \Delta x(k) \\ y_m(k) = y_0(k) + \Delta y_m(k) \end{cases} \quad (9)$$

permet d'obtenir :

$$(\mathcal{S}_{LTV}) \begin{cases} \frac{\partial \Delta x}{\partial t} = \frac{\partial F_d}{\partial x|_{(\mathcal{S}_0)}} \Delta x \text{ sur } \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial F_b}{\partial x|_{(\mathcal{S}_0)}} \Delta x + \frac{\partial F_b}{\partial u|_{(\mathcal{S}_0)}} \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ \Delta y_m = C \Delta x \text{ sur } \bar{\Omega} \times]0, +\infty[\\ \Delta x(z, 0) = 0 \text{ avec } z \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (10)$$

Structure de commande en temps réel

par modèle interne linéarisé temps variant



Problème d'optimisation contraint à résoudre en ligne

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \min_{\Delta \tilde{u}} J(\Delta \tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} g(y_{ref}(j), \Delta y_m(j), e(k), \Delta u(j-1)) \\
 \Delta \tilde{u} = [\Delta u(k) \dots \Delta u(k + N_c - 1)]^T \\
 c_i(y_{ref}(j), \Delta y_m(j), e(k), \Delta u(j-1)) \leq 0 \quad (i \in \mathcal{I}) \\
 (\mathcal{S}_{TVL}) \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \Delta x}{\partial t} = \frac{\partial F_d}{\partial x|_{(S_0)}} \Delta x \text{ for } 0 < z < e_{sec}, t > 0 \\
 \frac{\partial F_b}{\partial x|_{(S_0)}} \Delta x + \frac{\partial F_b}{\partial u|_{(S_0)}} \Delta u = 0 \text{ for } z \in \{0, e_{sec}\}, t > 0 \\
 \Delta y_m = C \Delta x \text{ for } 0 \leq z \leq e_{sec}, t > 0 \\
 \Delta x(z, 0) = 0 \text{ with for } 0 \leq z \leq e_{sec}
 \end{array} \right. \quad (11)
 \end{array} \right.$$

Pour les contraintes sur les entrées :

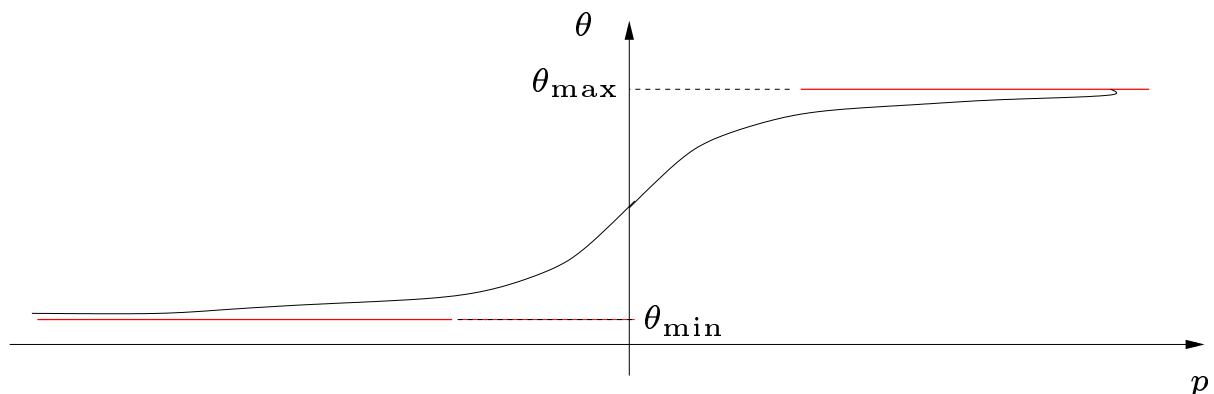
méthode de transformation

A partir de la variable contrainte θ :

$$\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

on introduit une nouvelle variable non contrainte p telle que :

$$\theta = f(p) = \frac{1}{2}(\theta_{\max} + \theta_{\min}) + \frac{1}{2}(\theta_{\max} - \theta_{\min}) \tanh(p)$$



Pour les contraintes sur les sorties :

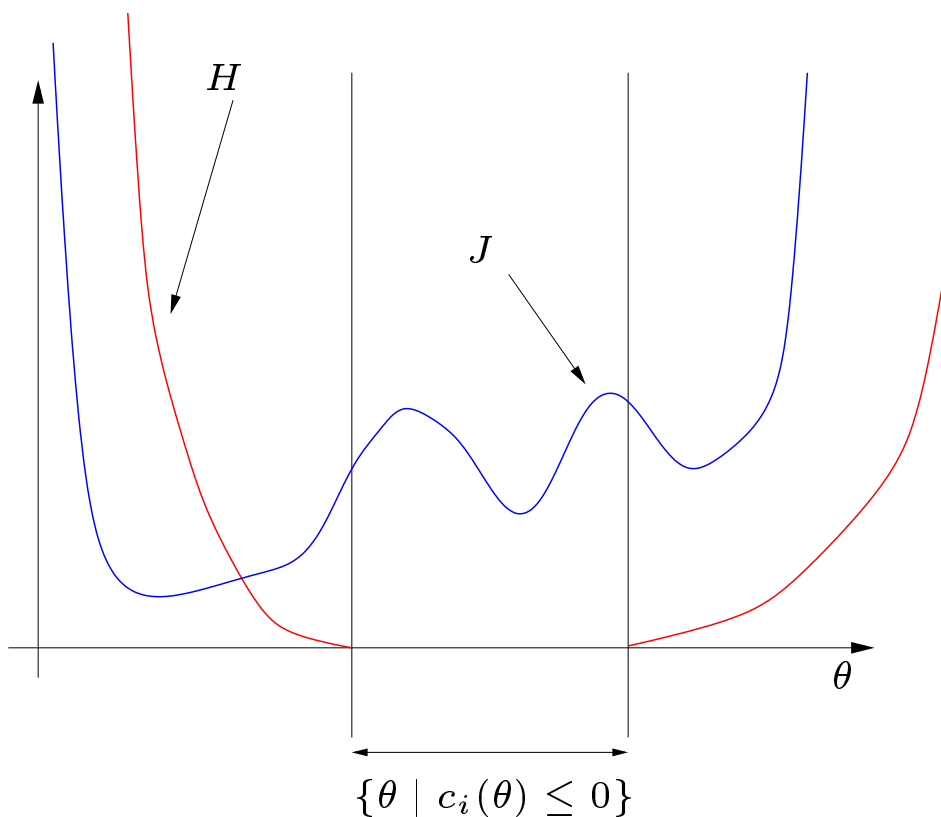
méthode de pénalités externes

A partir des $n_{co.ext}$ contraintes considérées :

$$c_i(\theta) \leq 0 \quad (12)$$

on définit le nouveau critère à minimiser :

$$\begin{cases} h_i(c_i(\theta)) = \max^2[0, c_i(\theta)] \\ H(c_i(\theta)) = \sum_{i=1}^{n_{co.ext}} h_i(c_i(\theta)) \\ J_{tot}(\theta) = J(\theta) + wH(c_i(\theta)) \end{cases} \quad (13)$$



Problème pénalisé final de commande à résoudre en ligne

$$\min_{\Delta \tilde{p}} J_{tot}(\Delta \tilde{p}) = \sum_{j=k+1}^{j=k+N_p} \{g(y_{ref}(j), \Delta y_m(j), e(k), \Delta p(j-1)) + w \sum_{i=1}^{n_{co.ext}} h(c_i(y_{ref}(j), \Delta y_m(j), e(k), \Delta p(j-1))))\}$$

$$\Delta \tilde{p} = [\Delta p(k) \dots \Delta p(k + N_c - 1)]^T \text{ avec } \Delta u(.) = f(\Delta p(.))$$

$$(\mathcal{S}_{LTV}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta x}{\partial t} = \frac{\partial F_d}{\partial x|_{(S_0)}} \Delta x \text{ sur } \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial F_b}{\partial x|_{(S_0)}} \Delta x + \frac{\partial F_b}{\partial u|_{(S_0)}} \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ \Delta y_m = C \Delta x \text{ sur } \bar{\Omega} \times]0, +\infty[\\ \Delta x(z, 0) = 0 \text{ avec } z \in \bar{\Omega} \end{array} \right. \quad (14)$$

Résolution du problème d'optimisation pénalisé

Avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt :

$$\begin{cases} \theta^{i+1} = \theta^i + \Delta\theta^i & (\text{avec } \theta = \Delta\tilde{p}) \\ (\nabla^2 J_{tot}^i + \lambda I)\Delta\theta^i = -\nabla J_{tot}^i \end{cases} \quad (15)$$

Pour les sensibilités $\nabla^2 J_{tot}^i$ et ∇J_{tot}^i , dans le cas **non-linéaire seulement**, **il serait nécessaire de résoudre en ligne** les N_c modèles de sensibilités et le modèle (influençant donc la **charge de calcul**).

Dans ce **cas linéaire**, ceci est réalisé hors ligne, ce qui permet de **réduire la charge de calcul**.

Conditions de simulation de la commande

- Les **perturbations d'entrée** du réacteur sont : la **température du gaz**, supposée mesurée et constante ($20^{\circ}C$), et sa **concentration**, supposée **non mesurée et variable** dans une des trois zones possibles :
 - concentration basse : $10^{-3}mol.m^{-3} \leq C_g(0,t) \leq 3 \times 10^{-3}mol.m^{-3}$,
 - concentration moyenne :
 $4 \times 10^{-3}mol.m^{-3} \leq C_g(0,t) \leq 6 \times 10^{-3}mol.m^{-3}$
 - concentration haute :
 $16 \times 10^{-3}mol.m^{-3} \leq C_g(0,t) \leq 18 \times 10^{-3}mol.m^{-3}$
- La **concentration de sortie** est supposée **mesurée (ou estimée)**, ainsi que la **température maximale**.
- La **discrétisation du modèle** est un paramètre de réglage.
- L'horizon de commande N_c est réglé à 1 (diminution temps de calcul mais résultats “moins performants”).

Problématique de commande (monovariable)

[Dufour, Couenne & Touré, IEEE Trans. on Control Systems Technology, à paraître]

$$\min_{P_{res}(k)} J(P_{res}(k)) = [P_{res}(k)]^2$$

avec les contraintes en amplitude et en vitesse sur la puissance électrique :

$$P_{res.\min} \leq P_{res}(k) \leq P_{res.\max}$$

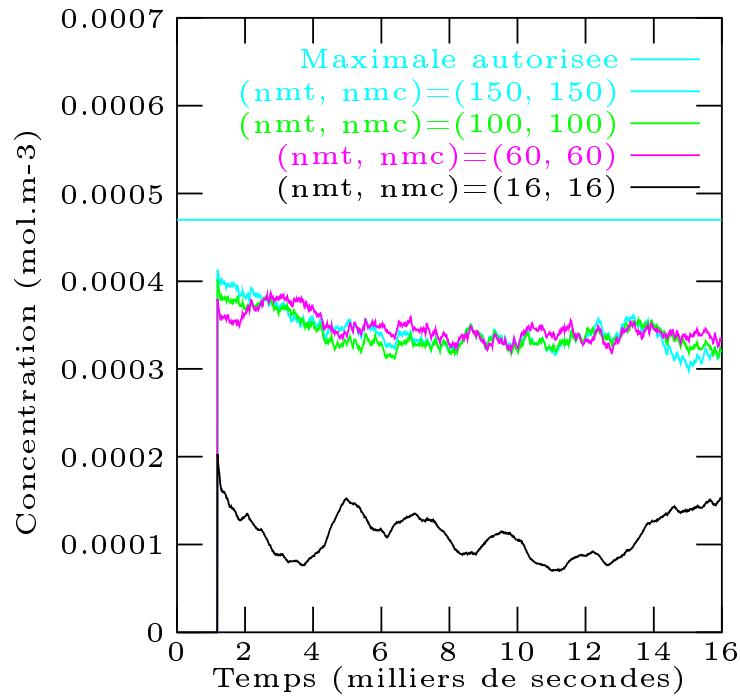
$$\Delta P_{res.\min} + P_{res}(k-1) \leq P_{res}(k) \leq \Delta P_{res.\max} + P_{res}(k-1)$$

avec la contrainte de type borne :

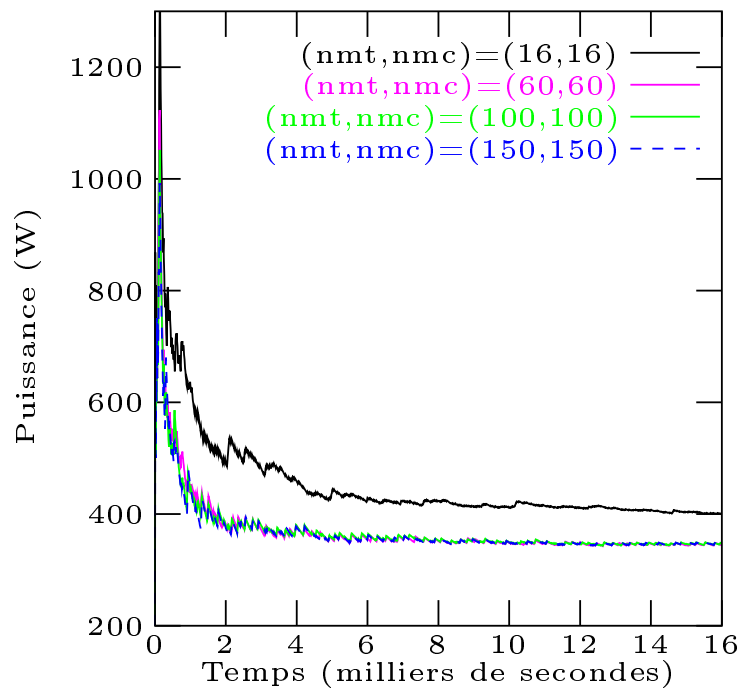
$$C_g(z_{MT2}, j) \leq C_{g.\max} \quad (\text{avec } j \in \{k+1, k+N_p\})$$

(16)

Simulation en concentration basse

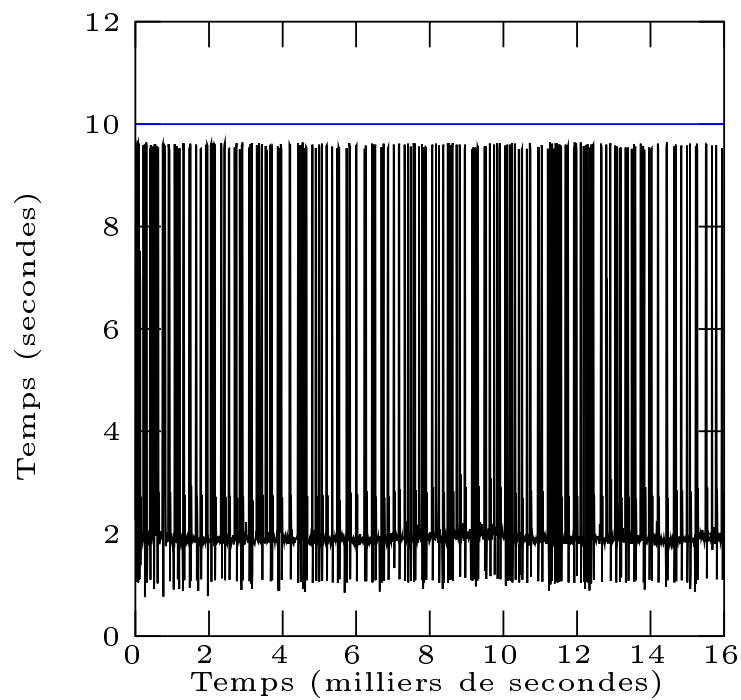


Concentration moyenne de polluant rejeté



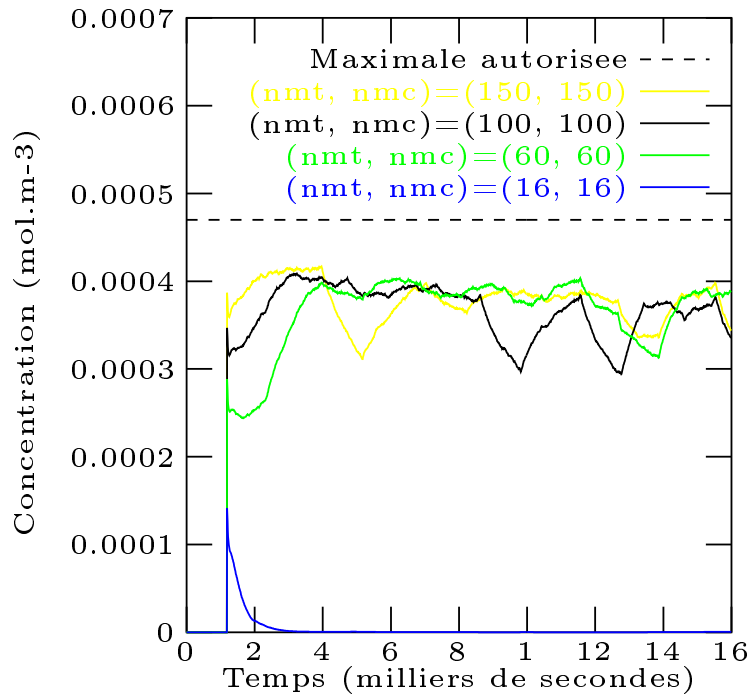
Puissance électrique moyenne consommée

Simulation en concentration basse

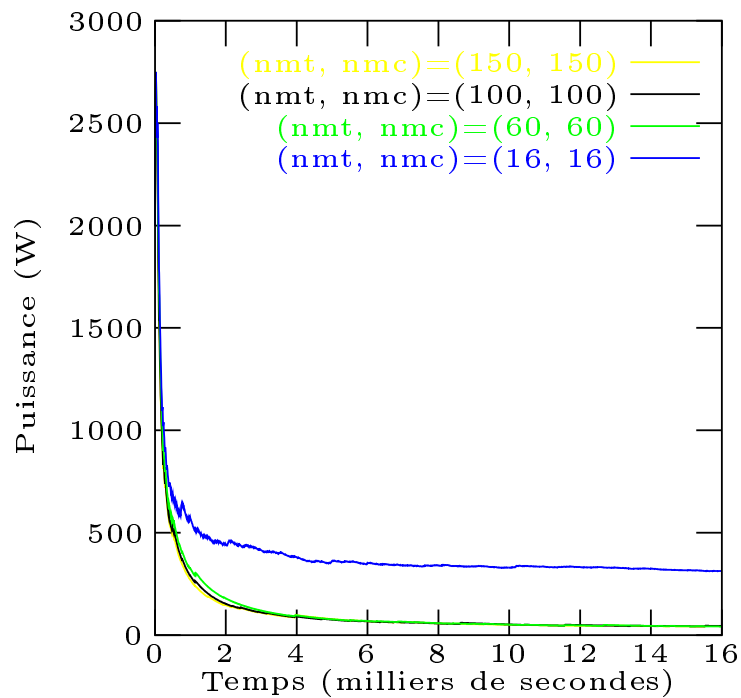


Temps de calcul de la commande ($T_e = 10s$)

Simulation en concentration moyenne

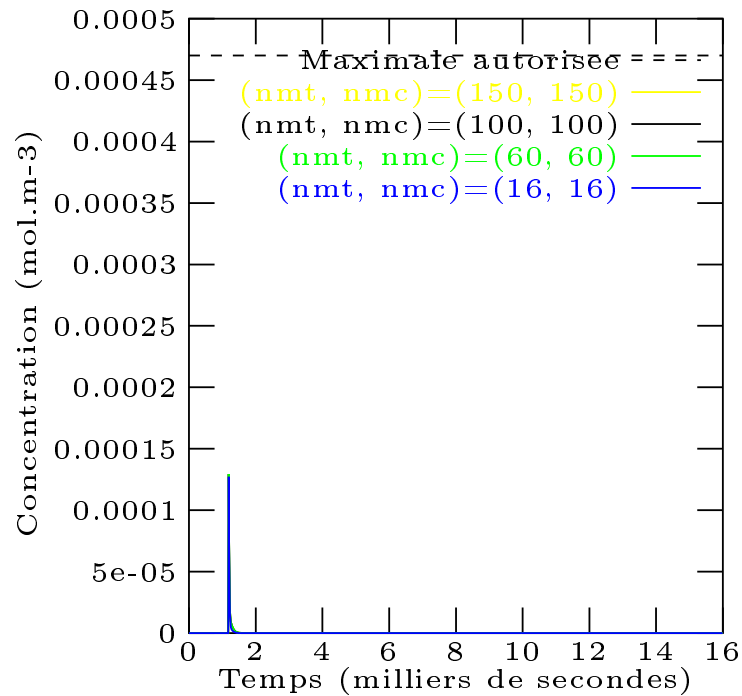


Concentration moyenne de polluant rejeté

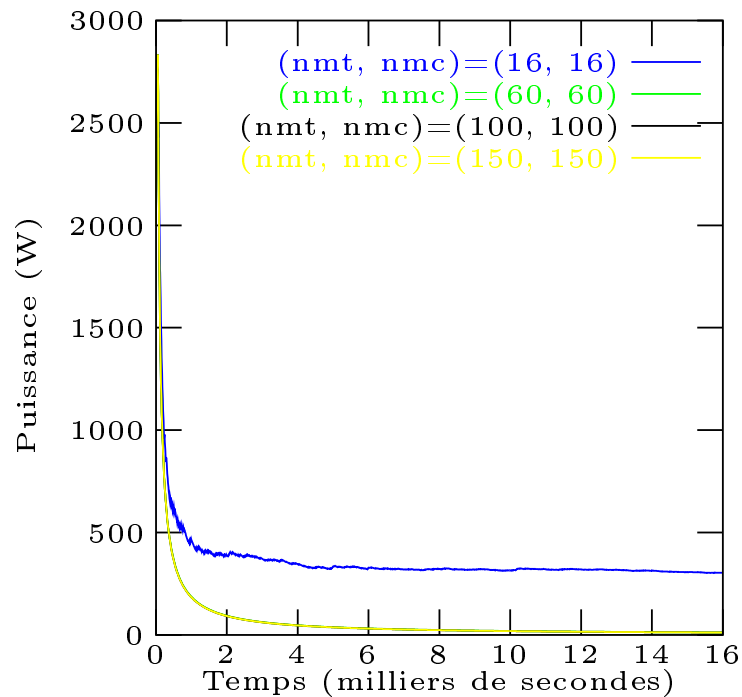


Puissance électrique moyenne consommée

Simulation en concentration haute

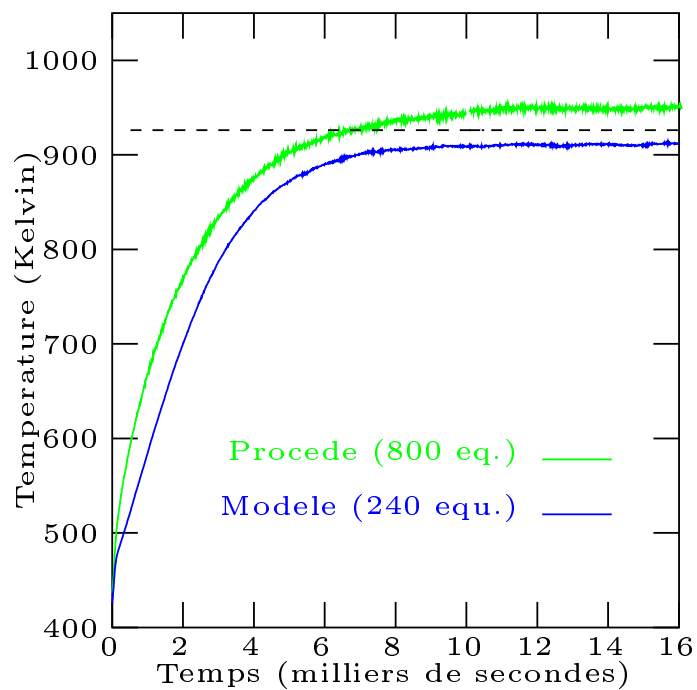


Concentration moyenne de polluant rejeté



Puissance électrique moyenne consommée

Simulation en concentration haute



Température maximum dans le réacteur

Problématique de commande (multivariable)

- On introduit le **taux de dilution** α , une **nouvelle variable de commande**. Une partie du gaz froid est dirigé directement au coeur du réacteur : $\alpha \rightarrow 0$ permet de refroidir au maximum, $\alpha = 1$ au minimum.
- On introduit alors une non-linéarité dans la partie jusqu'ici linéaire du modèle : la nouvelle **commande** α est **scalaire** et **agit explicitement instantanément sur la moitié du réacteur**. Exemple, pour

$z \in \Omega_{MC1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \frac{1}{\alpha} \frac{h a_c}{u_g \rho_g c_{p_g}} (T_s - T_g) \\ \frac{\partial C_g}{\partial z} = \frac{1}{\alpha} \frac{k_d a_c}{u_g} (C_s - C_g) \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_{sc} c_{p_s}} \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} + \frac{h a_c}{(1-\varepsilon) \rho_{st} c_{p_s}} (T_g - T_s) + \frac{(-\Delta H_r) k^\infty a_c}{(1-\varepsilon) \rho_{sc} c_{p_s}} e^{\frac{-E_a}{RT_s}} C_s \\ C_s = \frac{1}{1 + \frac{k^\infty}{k_d} e^{\frac{-E_a}{RT_s}}} C_g \end{array} \right. \quad (17)$$

Problématique de commande (multivariable)

$$\min_{P_{res}(k), \alpha(k)} J(P_{res}(k), \alpha(k)) = \left[\frac{P_{res}(k) - P_{res.\min}}{P_{res.\max} - P_{res.\min}} \right]^2 + \left[\frac{\alpha(k) - \alpha_{\max}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}} \right]^2$$

avec les contraintes sur la puissance électrique et le ratio de débit :

$$P_{res.\min} \leq P_{res}(k) \leq P_{res.\max}$$

$$\Delta P_{res.\min} + P_{res}(k-1) \leq P_{res}(k) \leq \Delta P_{res.\max} + P_{res}(k-1)$$

$$\alpha_{\min} = 0 < \alpha(k) \leq \alpha_{\max} = 1$$

(18)

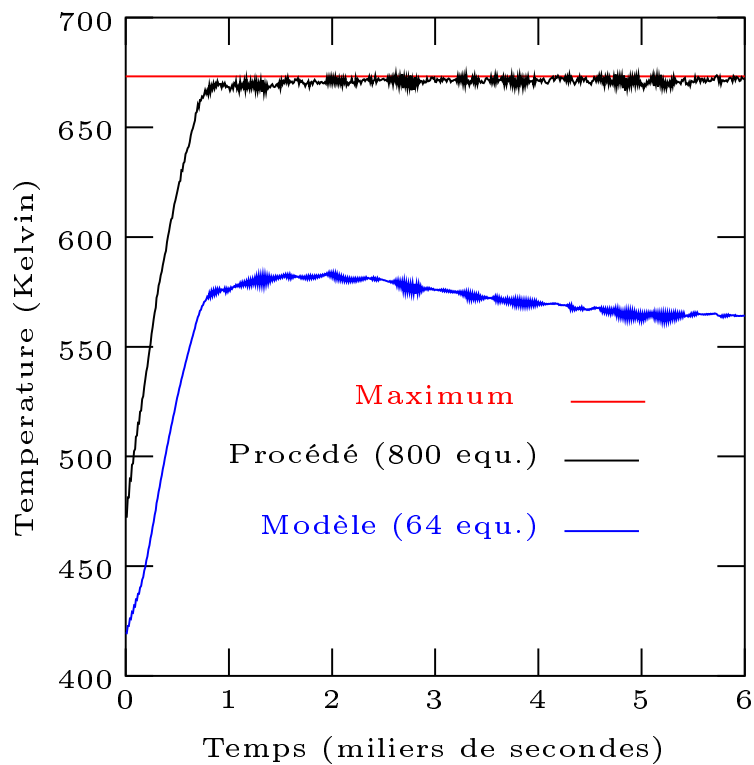
$$\Delta \alpha_{\min} + \alpha(k-1) \leq \alpha(k) \leq \Delta \alpha_{\max} + \alpha(k-1)$$

avec les contraintes de type borne :

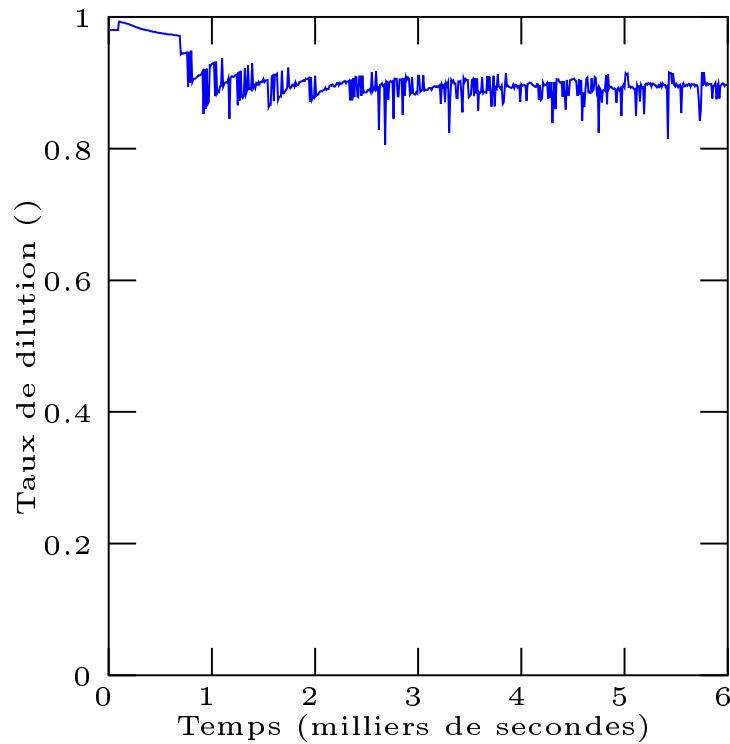
$$C_g(z_{MT2}, j) \leq C_{g.\max} \quad (\text{avec } j \in \{k + N_{p.i.c}, k + N_{p.f.c}\})$$

$$T_s(z, j) \leq T_{s.\max} \quad \forall z \quad (\text{avec } j \in \{k + N_{p.i.t}, k + N_{p.f.t}\})$$

Simulation en concentration haute

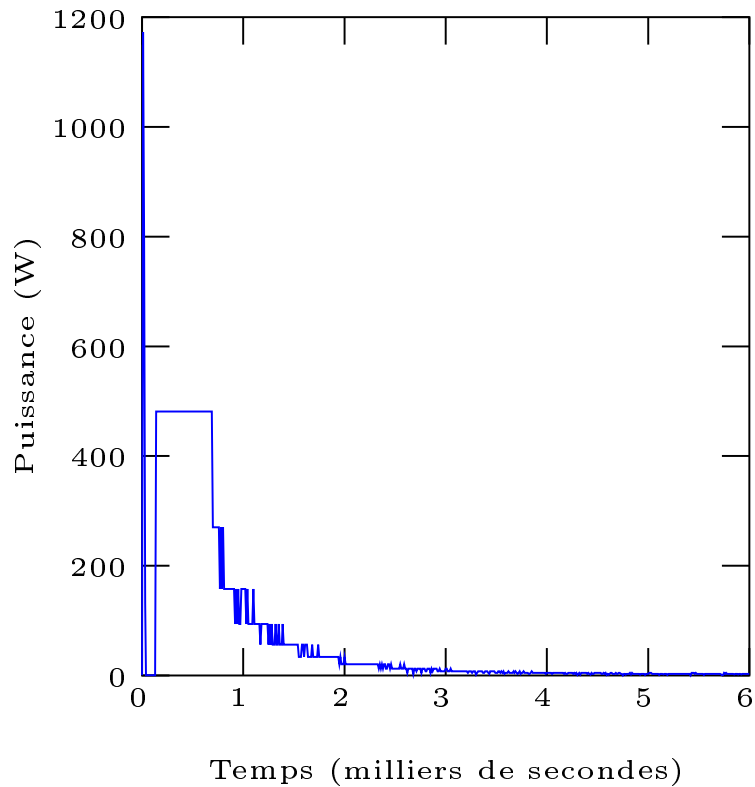


Température maximum dans le réacteur

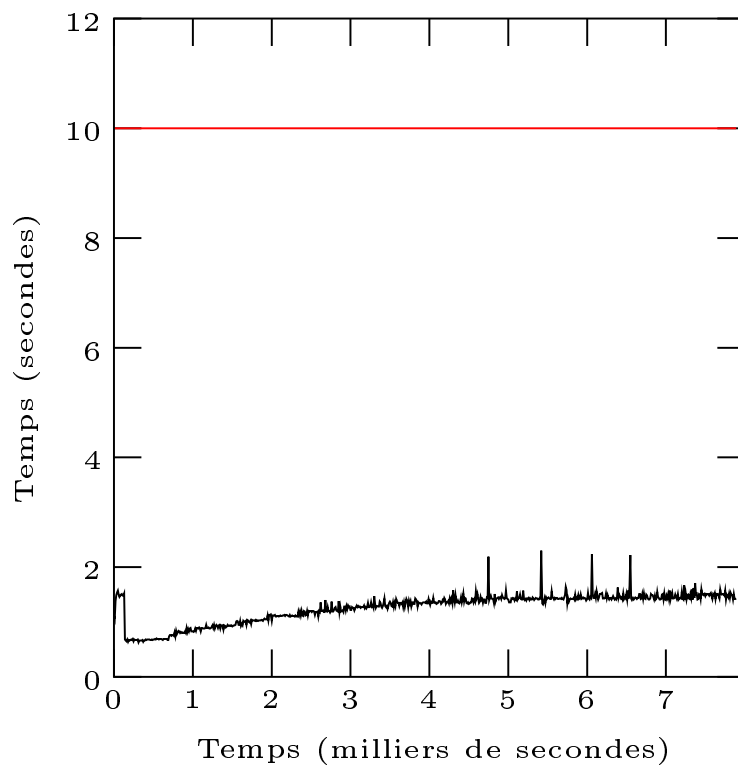


Taux de dilution instantanée

Simulation en concentration haute



Puissance électrique instantanée consommée



Temps de calcul de la commande

Conclusion

- Approche de **commande prédictive pour systèmes de dimension infinie** est applicable pour la commande en **temps réel** malgré la **complexité** du problème.
- La forme proposée **permet de résoudre divers problèmes contraints** : régulation, poursuite de trajectoire, optimisation de fonction ...
- Influence de la formulation du problème contraint sur le **choix des horizons** et de la **discrétisation** du modèle.

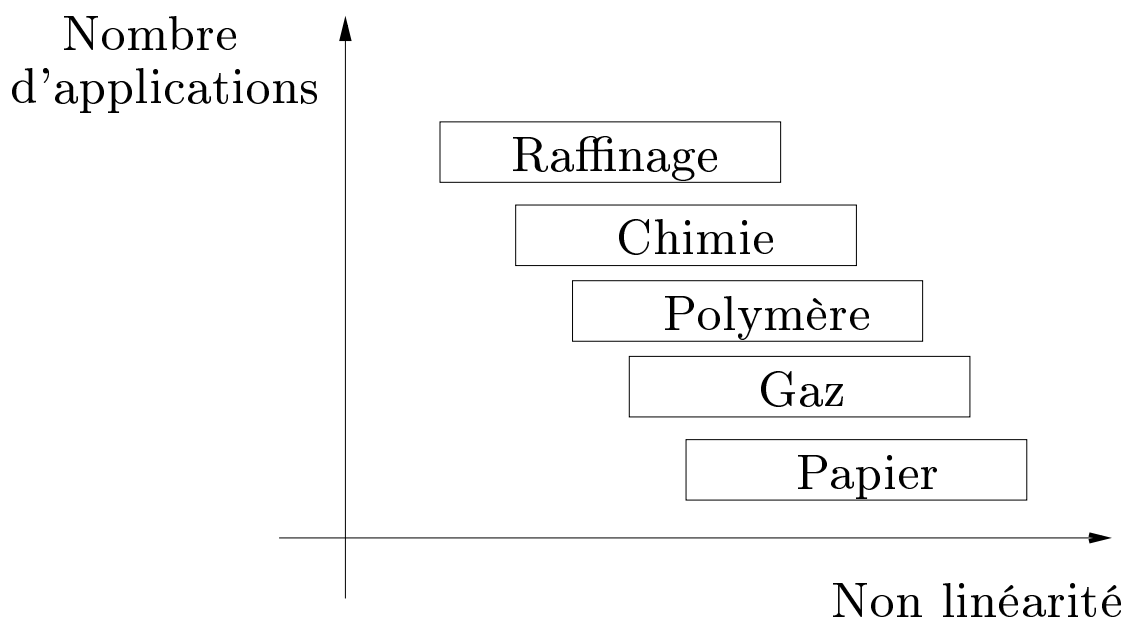
Perspective : aspects théoriques

- Commande par optimisation avec modèle EDP : **stabilité ? faisabilité ? résolution?**
- Utilisation d'un modèle de dimension finie pour la commande d'un système de dimension infinie : **approximation et validité ?**

Applications industrielles de la commande prédictive

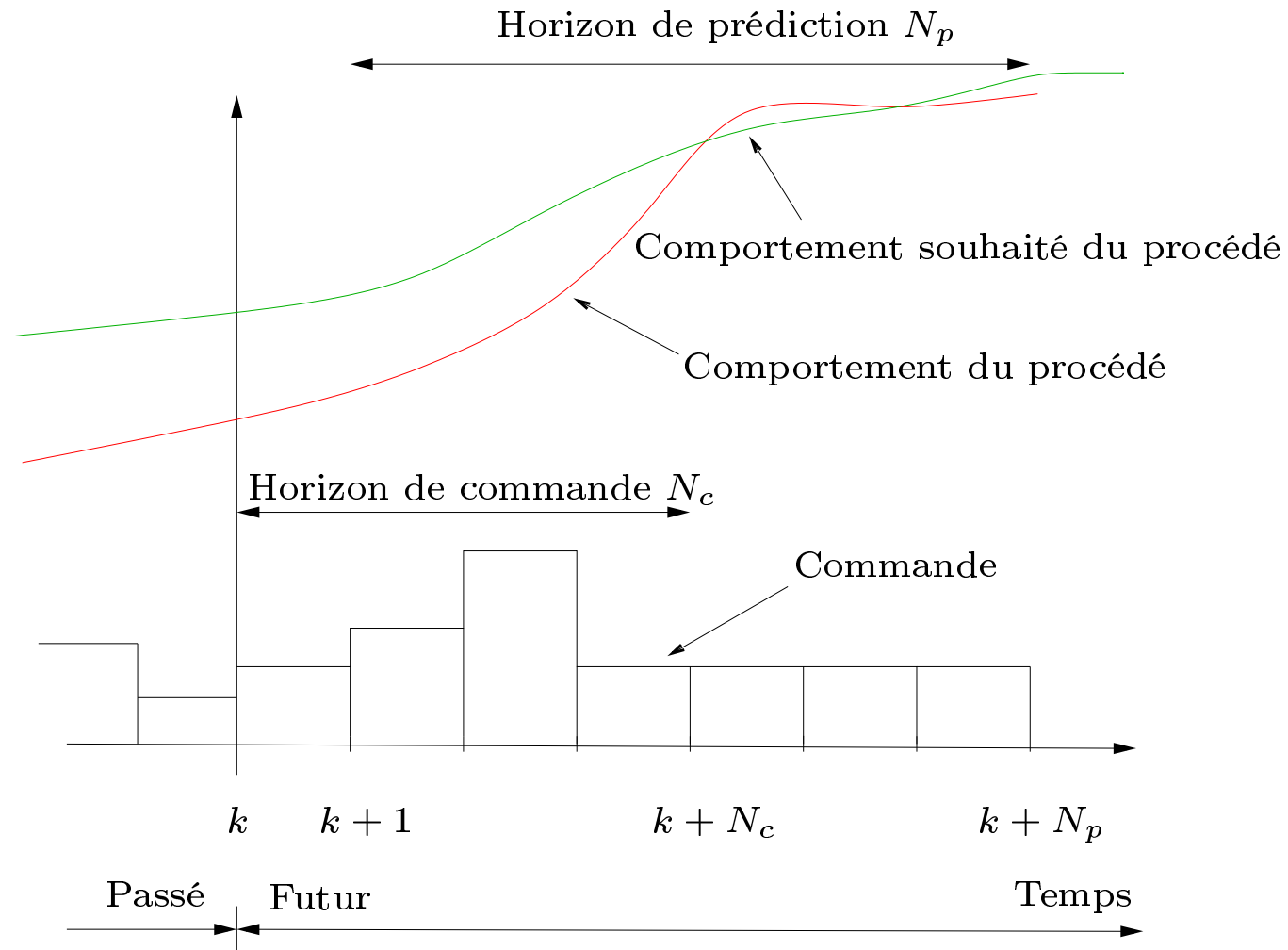
[Allgower et al., ECC'99]

Domaines	Nombre d'applications
Raffinage	1513
Chimie	520
Alimentaire	50
Papier	46
Air et gaz	28
Polymère	16
Autre	85
Total	2258



Stratégie de commande prédictive : paradigme

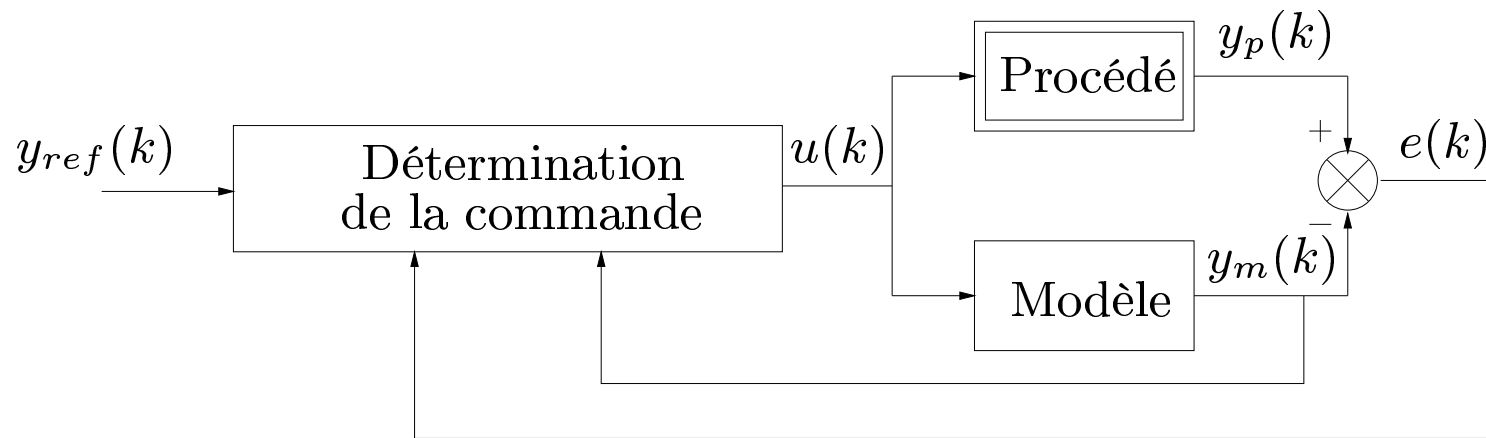
[Morari & Lee, *Comp. & Chem. Eng.*, 1999][Rawlings, *IEEE Control Systems*, 2000]



Commande predictive : les idées

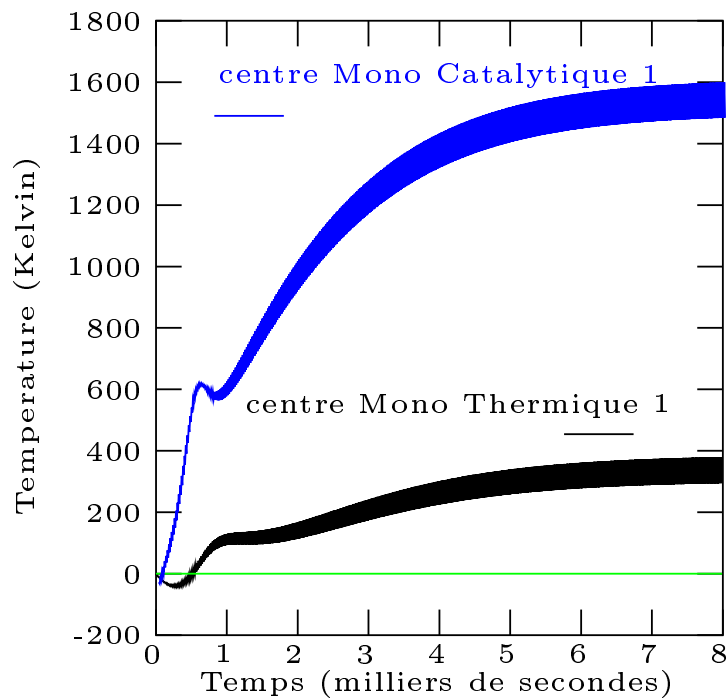
- Idée principal : **prévoir le futur comportement du procédé : besoin d'un modèle.**
 - ★ Historiquement, les modèles furent d'abord obtenus via **réponse expérimental** : simple mais domaine de validité locale ;
 - ★ Maintenant, l'utilisation de **modèle de premiers principes** se répand : complexité mais domaine de validité moins locale.
 - Commande en **temps réel** : nécessité de résoudre un **problème d'optimisation contraint** basé sur le **modèle** (et les mesures) :
 - ★ Nécessité de prendre en compte les **contraintes**,
 - ★ Nécessité de réduire la **difficulté de résolution**,
- ⇒ **Notre approche** : prendre en compte explicitement d'un **modèle non linéaire dynamique à paramètres répartis** dans une stratégie de commande prédictive **applicable en temps réel.**

Structure de commande en temps réel par modèle interne



Simulation en boucle ouverte :

ystème à non minimum de phase



Variation de T_g à une variation échelon de α de -5%