Faisabilité et ensembles invariants pour la commande prédictive

Hichem Benlaoukli

Département d'Automatique, Supelec
Email: hichem.benlaoukli@supelec.fr

Réunion CPNL 08/10/2009

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Outline

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Formulation de la Commande Prédictive MPC

Considérant le système LTI discret définit par:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \tag{1}$$

tel que: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, et $k \in \mathbb{N}$.
$x_k \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ est l'état du système à l'instant k.

Formulation de la Commande Prédictive MPC

La fonction coût est définit par:

$$V(k) = x_N^T P x_N + \sum_{i=1}^{H_p-1} x_{k+i}^T Q_i x_{k+i} + \sum_{i=0}^{H_u-1} u_{k+i}^T R_i u_{k+i} \qquad (2)$$

sous la contrainte: $C' x_k + D' u_k \leqslant \gamma$
tel que:

- $H_p = N$ est l'horizon de prédiction;
- $H_u = N_u$ est l'horizon de commande et pour $i \geqslant H_u$, $\Delta u_{k+i|k} = 0$;
- $Q_i = Q_i^T$ et $R_i = R_i^T$ sont les facteurs de pondérations sur l'erreur et les commandes.
- P est la solution de l'équation de Riccati $P = A^T P A + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$.

Formulation de la Commande Prédictive MPC

La fonction coût est définit par:

$$V(k) = x_N^T P x_N + \sum_{i=1}^{H_p-1} x_{k+i}^T Q_i x_{k+i} + \sum_{i=0}^{H_u-1} u_{k+i}^T R_i u_{k+i} \quad (2)$$

sous la contrainte: $C' x_k + D' u_k \leqslant \gamma$
tel que:

- $H_p = N$ est l'horizon de prédiction;
- $H_u = N_u$ est l'horizon de commande et pour $i \geqslant H_u$, $\Delta u_{k+i|k} = 0$;
- $Q_i = Q_i^T$ et $R_i = R_i^T$ sont les facteurs de pondérations sur l'erreur et les commandes.
- P est la solution de l'équation de Riccati $P = A^T PA + Q - A^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA$.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
Introduction
Construction contractive
Construction expansive
Amélioration du temps de calcul
Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
Formulation du problème

Formulation de la Commande Prédictive MPC

La fonction coût est définit par:

$$V(k) = x_N^T P x_N + \sum_{i=1}^{H_p-1} x_{k+i}^T Q_i x_{k+i} + \sum_{i=0}^{H_u-1} u_{k+i}^T R_i u_{k+i} \qquad (2)$$

sous la contrainte: $C' x_k + D' u_k \leqslant \gamma$
tel que:

- $H_p = N$ est l'horizon de prédiction;
- $H_u = N_u$ est l'horizon de commande et pour $i \geqslant H_u$, $\Delta u_{k+i|k} = 0$;
- $Q_i = Q_i^T$ et $R_i = R_i^T$ sont les facteurs de pondérations sur l'erreur et les commandes.
- P est la solution de l'équation de Riccati $P = A^T P A + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$.

Formulation de la Commande Prédictive MPC

La fonction coût est définit par:

$$V(k) = \begin{array}{l} x_N^T P x_N + \sum_{i=1}^{H_p-1} x_{k+i}^T Q_i x_{k+i} \\ + \sum_{i=0}^{H_u-1} u_{k+i}^T R_i u_{k+i} \end{array} \quad (2)$$

sous la contrainte: $C' x_k + D' u_k \leqslant \gamma$
tel que:

- $H_p = N$ est l'horizon de prédiction;
- $H_u = N_u$ est l'horizon de commande et pour $i \geqslant H_u$, $\Delta u_{k+i|k} = 0$;
- $Q_i = Q_i^T$ et $R_i = R_i^T$ sont les facteurs de pondérations sur l'erreur et les commandes.
- P est la solution de l'équation de Riccati $P = A^T P A + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$.

Solution Explicite

Une des limitations de la commande prédictive MPC concerne son incapacité à traiter les systèmes à cadence d'échantillonnage élevée par ce qu'elle doit résoudre un problème d'optimisation on-line. Cette limitation peut être surmonter par la construction de la formulation explicite (de la loi de commande) off-line.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Solution Explicite

La commande MPC est équivalente à la résolution d'un programme quadratique multiparamétrique.

La loi de commande à contre réaction (feedback) obtenue est une fonction affine par morceaux définit par un ensemble de régions polytopiques:

$$u_k = F_i x_k + G_i \tag{3}$$

et la dynamique du système en boucle fermée devient:

$$x_{k+1} = (A + BF_i)x_k + BG_i \tag{4}$$

qui est un système affine par morceaux.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

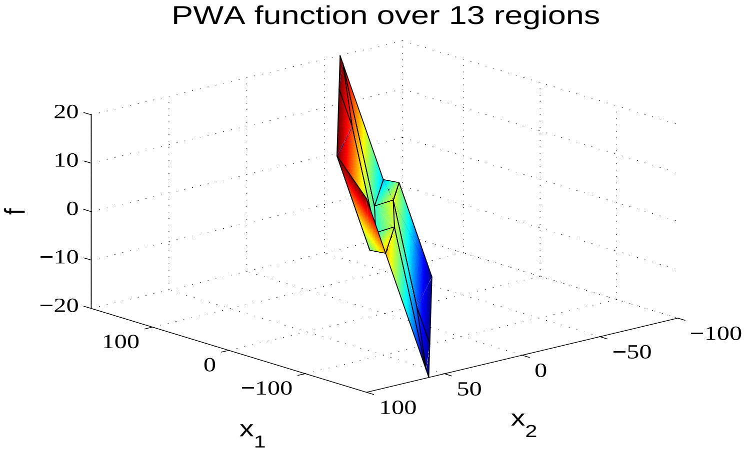
Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

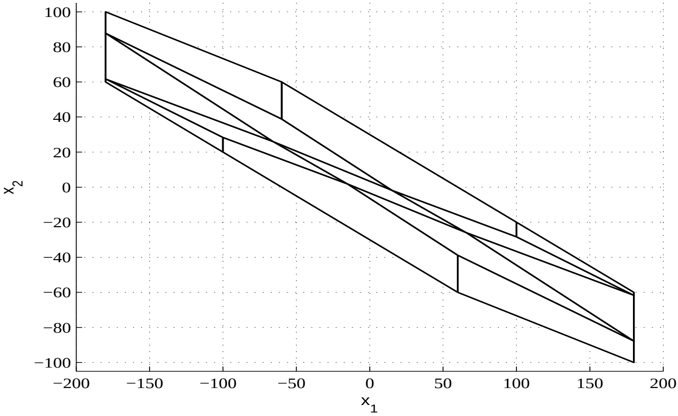
Solution Explicite

Exemple d'une solution explicite:



Solution Explicite

et la projection de cette solution explicite dans l'espace d'état est donnée par:



Solution Explicite

Dans ce qui suit, la loi de commande prédictive MPC est obtenue par l'optimisation d'une fonction coût sous contraintes mais sans contraintes terminal.

$$V(k) = \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{H_p-1} x_{k+i}^T Q_i x_{k+i} \\ + \sum_{i=0}^{H_u-1} u_{k+i}^T R_i u_{k+i} \end{array} \tag{5}$$

sous la contrainte: $C'x_k + D'u_k \leqslant \gamma$

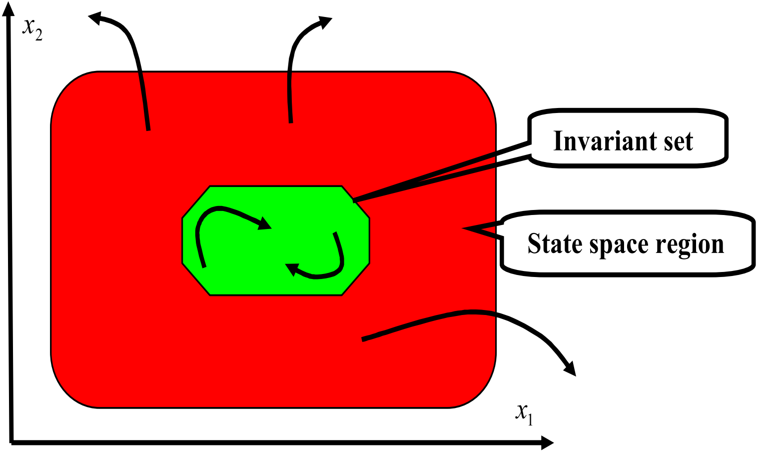
Cette méthodologie ne peut pas garantir la stabilité du système:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \tag{6}$$

et si on veut déterminer la région dans l'espace d'état pour laquelle le système est stable on est ramené à la construction à posteriori de son ensemble invariant.

Ensembles invariants

Un ensemble invariant est une région dans l'espace d'état tel que la faisabilité est garantit de l'état initial à l'état final.



Faisabilité et ensembles invariants pour la commande prédictive

Hichem Benlaoukli

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

La question qui se pose est:

- Comment construire l'ensemble invariant d'une solution explicite calculée à partir d'une formulation de loi de commande MPC sans contrainte terminale ?
- ou bien d'une façon plus générale, comment construire l'ensemble invariant pour un système PWA linéaire et autonome, défini sur une partition polytopique avec une région centrale qui contient le zéro ?

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

La question qui se pose est:

- Comment construire l'ensemble invariant d'une solution explicite calculée à partir d'une formulation de loi de commande MPC sans contrainte terminale ?
- ou bien d'une façon plus générale, comment construire l'ensemble invariant pour un système PWA linéaire et autonome, défini sur une partition polytopique avec une région centrale qui contient le zéro ?

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Outline

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Construction d'ensembles invariants: Introduction

Trois algorithmes ont été développés:

- Algorithme opérant par construction contractive
- Algorithme opérant par construction expansive
- Algorithme utilisant les graphes des transitions

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction d'ensembles invariants: Introduction

Trois algorithmes ont été développés:

- Algorithme opérant par construction contractive
- Algorithme opérant par construction expansive
- Algorithme utilisant les graphes des transitions

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction d'ensembles invariants: Introduction

Trois algorithmes ont été développés:

- Algorithme opérant par construction contractive
- Algorithme opérant par construction expansive
- Algorithme utilisant les graphes des transitions

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Introduction

Les deux premiers algorithmes, permettent de calculer ou d'approximer l'ensemble invariant exacte tel que:

$$\Phi^- \subseteq \Phi^{MPI} \subseteq \Phi^+$$

Φ^{MPI} est l'ensemble invariant exacte (Maximal Positively Invariant set).

Φ^- et Φ^+ sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble Φ^{MPI}.

L'algorithme opérant par construction contractive calcule l'ensemble Φ^+, et l'algorithme opérant par construction expansive calcule l'ensemble Φ^-.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC
Solution Explicite
Ensembles invariants
Construction d'ensembles invariants
Introduction
Construction contractive
Construction expansive
Amélioration du temps de calcul
Construction basée sur le graphes des transitions
Faisabilité du suivi de trajectoire
Formulation du problème

Outline

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

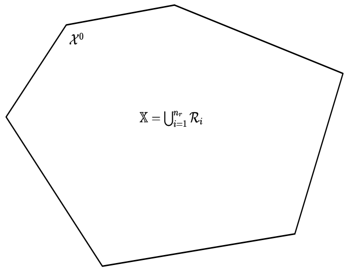
Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

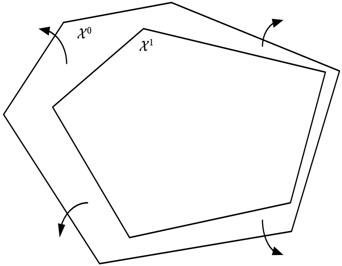
Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Construction contractive: principe



Ensemble initial $\mathcal{X}^0 = \mathbb{X}$, pour lequel on cherche à trouver la borne supérieur Φ^+ de son ensemble invariant

Construction contractive: principe



On supprime toutes les régions qui sortent de $\mathcal{X}^0$ en un pas, ce qui veut dire qu'on ne retient de $\mathcal{X}^0$ que $\bigcup_{i=1}^{card(\mathcal{X}^0)} preImage(\mathcal{X}^0(i), \mathcal{X}^0)$. l'ensemble obtenu est $\mathcal{X}^1$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

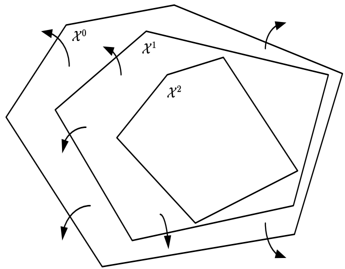
Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction contractive: principe



On supprime toutes les régions qui sortent de $\mathcal{X}^1$ en un pas, ce qui veut dire qu'on ne retient de $\mathcal{X}^1$ que $\bigcup_{i=1}^{card(\mathcal{X}^1)} preImage(\mathcal{X}^1(i), \mathcal{X}^1)$. L'ensemble obtenu est $\mathcal{X}^2$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

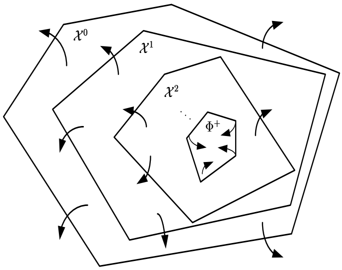
Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Construction contractive: principe



On continue ainsi à supprimer à chaque itération *iter*, toutes les régions et sous-régions qui sortent de l'ensemble $\mathcal{X}^{iter}$ en un pas, jusqu'à l'obtention d'un ensemble Φ^+ (s'il existe) pour lequel aucune trajectoire n'y peut s'échappée, ce qui implique que $\Phi^+ = \bigcup_{i=1}^{card(\Phi^+)} preImage(\Phi^+(i), \Phi^+)$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction contractive: remarques

- Si l'ensemble $\mathcal{X}^{iter}$ ne change pas entre deux itérations successives, alors la construction s'arrête, et le résultat obtenu est exactement l'ensemble invariant $\Phi^{+} = \Phi^{\mathtt{MPI}}$, si non, il s'arrête quand il arrive au nombre maximale des itérations.
- Quand le cardinal de $\mathcal{X}^{iter}$ augmente, la construction contractive devient très gourmand en temps de calcul. On présentera une technique basée sur l'analyse par intervalles, et graphe des transitions pour améliorer le temps de calcul.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction contractive: remarques

- Si l'ensemble $\mathcal{X}^{iter}$ ne change pas entre deux itérations successives, alors la construction s'arrête, et le résultat obtenu est exactement l'ensemble invariant $\Phi^{+} = \Phi^{\mathtt{MPI}}$, si non, il s'arrête quand il arrive au nombre maximale des itérations.
- Quand le cardinal de $\mathcal{X}^{iter}$ augmente, la construction contractive devient très gourmand en temps de calcul. On présentera une technique basée sur l'analyse par intervalles, et graphe des transitions pour améliorer le temps de calcul.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Outline

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

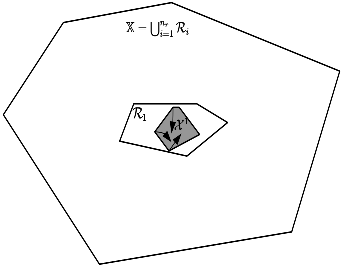
Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d’ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Construction expansive: principe



Ensemble initial $\mathbb{X}$, pour lequel on cherche à trouver la borne inférieur de son ensemble invariant Φ^-. On calcule pour la région centrale $\mathcal{R}_1$ l'ensemble invariant correspondant $\mathcal{Y}^1 = \mathcal{X}^1$. Cet ensemble existe si cette région à une dynamique stable. Ce calcul correspond à la première itération de l'algorithme

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

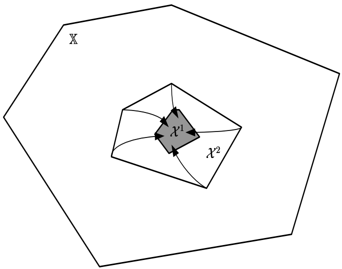
Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

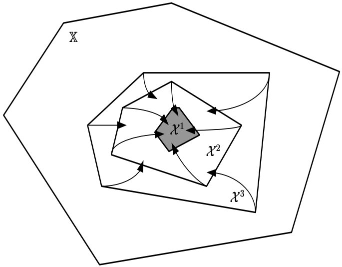
Formulation du problème

Construction expansive: principe



Dans la deuxième itération on cherche l'ensemble $\mathcal{X}^2 \subseteq \mathbb{X}$, tel que *image*$(\mathcal{X}^2) \subseteq \mathcal{X}^1$, ce qui veut dire que $\mathcal{X}^2$ est l'ensemble des états qui vont dans un seul pas vers $\mathcal{X}^1$

Construction expansive: principe



Dans la troisième itération on cherche l'ensemble $\mathcal{X}^3 \subseteq \mathbb{X}$, tel que *image*$(\mathcal{X}^3) \subseteq \mathcal{X}^2$, ce qui veut dire que $\mathcal{X}^3$ est l'ensemble des états qui vont dans un seul pas vers $\mathcal{X}^2$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

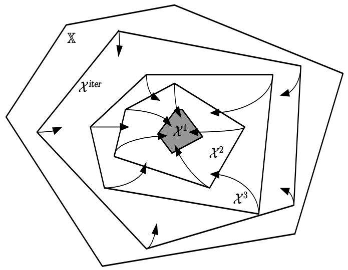
Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Construction expansive: principe



On continue ainsi à chercher pour l'itération *iter* l'ensemble $\mathcal{X}^{iter} \subseteq \mathbb{X}$, tel que *image*$(\mathcal{X}^{iter}) \subseteq \mathcal{X}^{iter-1}$. On s'arrête quand $\mathcal{X}^{iter} = \emptyset$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction expansive: remarques

- À la première étape de la construction expansive, $\mathcal{X}^1$ ne devrai par être un ensemble vide, si non, la borne inférieur et l'ensemble invariant $\Phi^- = \Phi^{\mathtt{MPI}} = \emptyset$.
- Si pour une itération donnée, il n'y a aucun ensemble dans $\mathbb{X} \backslash \mathcal{Y}^{iter}$ qui peut atteindre $\mathcal{X}^{iter-1}$, alors la construction s'arrêtera avec comme résultat l'ensemble invariant maximal $\Phi^- = \Phi^{\mathtt{MPI}}$. Sinon la construction s'arrêtera après l'exécution du nombre maximal des itérations.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC
Solution Explicite
Ensembles invariants
Construction d'ensembles invariants
Introduction
Construction contractive
Construction expansive
Amélioration du temps de calcul
Construction basée sur le graphes des transitions
Faisabilité du suivi de trajectoire
Formulation du problème

Construction expansive: remarques

- À la première étape de la construction expansive, $\mathcal{X}^1$ ne devrai par être un ensemble vide, si non, la borne inférieur et l'ensemble invariant $\Phi^- = \Phi^{\mathtt{MPI}} = \emptyset$.
- Si pour une itération donnée, il n'y a aucun ensemble dans $\mathbb{X} \backslash \mathcal{Y}^{iter}$ qui peut atteindre $\mathcal{X}^{iter-1}$, alors la construction s'arrêtera avec comme résultat l'ensemble invariant maximal $\Phi^- = \Phi^{\mathtt{MPI}}$. Sinon la construction s'arrêtera après l'exécution du nombre maximal des itérations.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction expansive: Problèmes liés au présence de cycles limites

Cycle limite: Les cycles limites représentent des trajectoires fermées d'un système dynamique. Dans le cas des systèmes en temps continu, les cycles limites décrivent des courbes fermée dans le plan des phases.

- La construction expansive peut être bloqué par ce phénomène car leurs convergence peut trouver comme limite la frontière du bassin d'attraction du cycle limite
- la construction contractive capte ces cycles limites car il procède par contraction et il traite exclusivement les régions extérieurs à l'ensemble invariant maximal.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Construction expansive: Problèmes liés au présence de cycles limites

Cycle limite: Les cycles limites représentent des trajectoires fermées d'un système dynamique. Dans le cas des systèmes en temps continu, les cycles limites décrivent des courbes fermée dans le plan des phases.

- La construction expansive peut être bloqué par ce phénomène car leurs convergence peut trouver comme limite la frontière du bassin d'attraction du cycle limite
- la construction contractive capte ces cycles limites car il procède par contraction et il traite exclusivement les régions extérieurs à l'ensemble invariant maximal.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction expansive: exemple du phénomène du cycle limite

On considère un système `LTI` discret, qui consiste à faire une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan de phase:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k)$$

avec les contraintes:

$$\begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} x(k) \leq 3.5355\ \mathbb{1}_{4,1}, \quad \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} u(k) \leq 0.3536\ \mathbb{1}_{4,1},$$

On calcule une loi de commande prédictive pour ce système, avec les horizons de prédiction et de contrôle $N = 3$, $N_u = 3$. Les matrices de pondérations sont $Q = \mathbb{I}_2$ et $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$.

Construction expansive: exemple du phénomène du cycle limite

- voir démo pour cet exemple

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

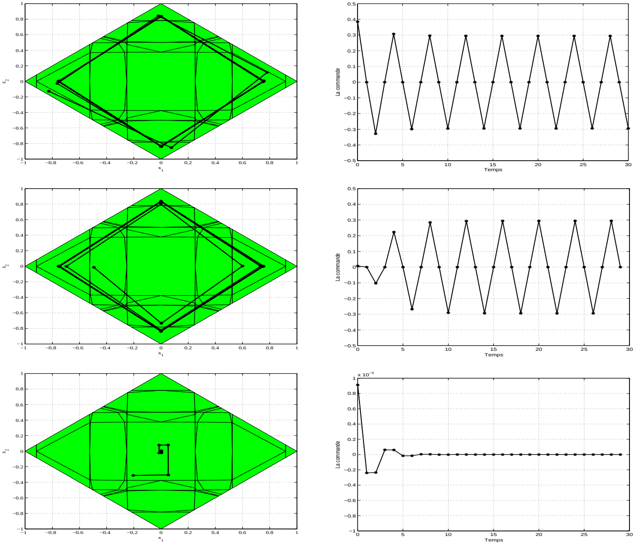
Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction expansive: exemple du phénomène du cycle limite



Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

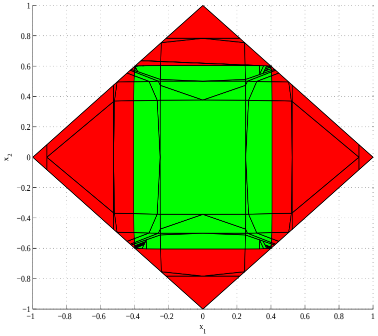
Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction expansive: exemple du phénomène du cycle limite



Convergence entre construction expansive et contractive: distance de Hausdorff

La distance de Hausdorff D_H entre deux ensembles $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ est définie par:

$$D_H(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \max(dh(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2), dh(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)) \tag{7}$$

avec $dh(.,.)$ représentant la distance de Haudorff orientée:

$$dh(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \max_{x_1 \in \mathbb{X}_1} d(x_1, \mathbb{X}_2) \tag{8}$$

d représente la distance entre le point x_1 et l'ensemble $\mathbb{X}_2$. En utilisant la norme deux pour calculer cette distance:

$$\begin{aligned} dh(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) &= \max_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \min_{x_2 \in \mathbb{X}_2} \|x_1, \mathbb{X}_2\|_2 && (9) \\ dh(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) &= \max_{x_1 \in \mathbb{X}_1} \min_{x_2 \in \mathbb{X}_2} \frac{1}{2} x_2^T \mathbb{I}_n x_2 - x_1^T x_2 && (10) \end{aligned}$$

Convergence entre construction expansive et contractive: distance de Hausdorff, exemple

Considérant le système discret suivant:

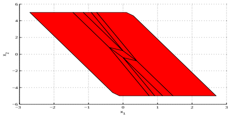
$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \qquad (11)$$

avec les contraintes:

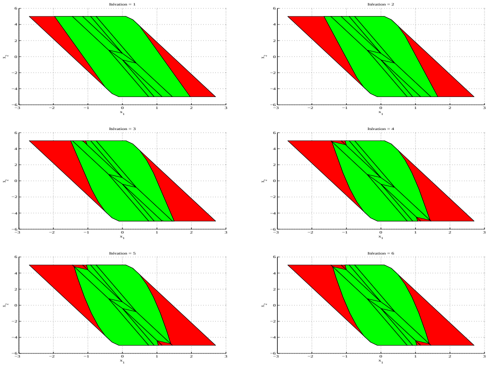
$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} x(k) \leq 0.1 \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2,1} \\ -\mathbb{1}_{2,1} \end{bmatrix}$$

On calcule une loi de commande prédictive pour ce système, avec les horizons de prédiction et de contrôle $N = 2$, $N_u = 2$. Les matrices de pondérations sont $Q = \mathbb{I}_2$ et $R = 1$. L'algorithme contractive exécute 6 itérations pour trouver l'ensemble invariant exacte, alors que l'algorithme expansive exécute 22 itérations.

Convergence entre construction expansive et contractive: distance de Hausdorff, exemple



(a)



(b)

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

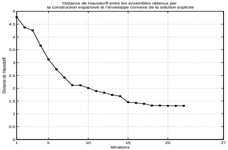
Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

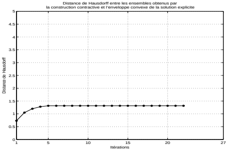
Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

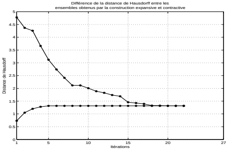
Convergence entre construction expansive et contractive: distance de Hausdorff, exemple



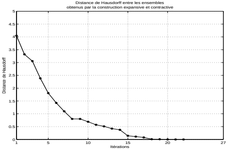
(c)



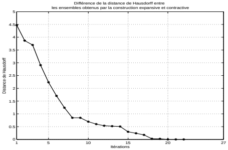
(d)



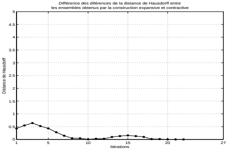
(e)



(f)



(g)



(h)

Faisabilité et ensembles invariants pour la commande prédictive

Hichem Benlaoukli

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Outline

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Introduction: Définition

La recherche par intervalles est un algorithme utilisé pour trouver un sous ensemble d'intervalles qui intersectent un intervalle donné. Cet algorithme est utilisé pour diminuer le temps de calcul des algorithmes. Pour se faire on a besoin de créer:

- une structure de données sous forme d'arbre d'intervalles;
- un algorithme pour scruter cet arbre.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

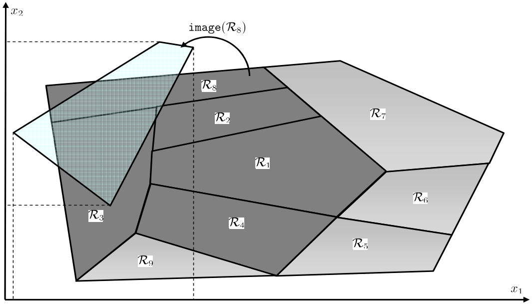
Formulation du problème

Introduction: Définition

La recherche par intervalles est un algorithme utilisé pour trouver un sous ensemble d'intervalles qui intersectent un intervalle donné. Cet algorithme est utilisé pour diminuer le temps de calcul des algorithmes. Pour se faire on a besoin de créer:

- une structure de données sous forme d'arbre d'intervalles;
- un algorithme pour scruter cet arbre.

Amélioration du temps de calcul: Principe



Amélioration du temps de calcul: Exemple

On considère la construction d'une loi de commande prédictive pour le système suivant:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.125 \end{bmatrix} u(k) \qquad (12)$$

avec les contraintes:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} x(k) \leq 10 \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2,1} \\ -\mathbb{1}_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) \leq \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

avec les horizons de prédiction et de commande $N = 7$, $N_u = 7$, les matrices de pondérations $Q = \mathbb{I}_2$ et $R = 0.1$. La loi de commande explicite possède 99 régions. En utilisant la construction contractive avec et sans analyse par intervalle, pour un calcul de 20 itération, le tableau suivant montre la différence entre ces deux approches.

Amélioration du temps de calcul: Exemple

nombre d'itérations	3	8	10	15	20
nombre de régions	99	110	119	155	189
nbr. d'opérations sans analyse par intervalles	9801	12100	14161	24025	35721
nbr. d'opérations avec analyse par intervalles	2657	2666	3020	4479	6116

Outline

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d’ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Graphe des transitions: définitions

Considérant le système PWA suivant:

$$x(k+1) = A_i x(k) + a_i \tag{13}$$

défini sur une partition polytopiques $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{n_r} \mathcal{R}_i$.

Un graphe des transitions associé au système PWA, est décri par la paire (Ω, Θ) où Ω est l'ensemble des noeuds, et Θ l'ensemble des arcs. Chaque région $\mathcal{R}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n_r$ est associé avec un noeud $\mathcal{N}_i \in \Omega$. Par défaut le noeud $\mathcal{N}_0$ sera associé à la région $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{X}$. L'existence d'un arc orienté t_{ij} entre le noeud $\mathcal{N}_i$ et $\mathcal{N}_j$ est équivalent à l'existence d'au moins d'une trajectoire qui démarre dans $x \in \mathcal{R}_i$ et satisfait $A_i x(k) + a_i \in \mathcal{R}_j$.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

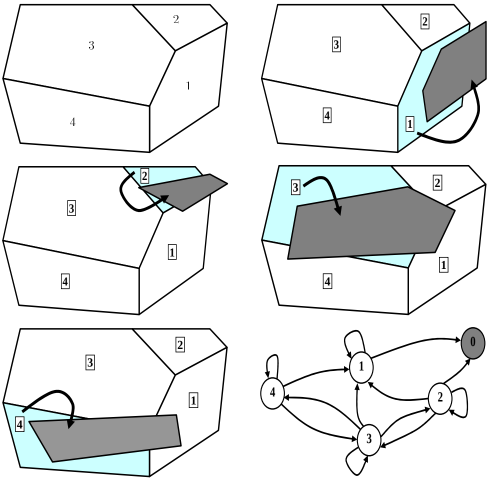
Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Graphe des transitions: exemple



Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Graphe des transitions: exemple

Utilisant les opérateurs *image* et *preImage*: les arcs Θ peuvent être sauvegardés dans une matrice (généralement non symétrique) $\mathcal{M} \in \{0, 1\}^{(n_r+1)\times(n_r+1)}$.
La matrice des transitions correspondante à notre exemple est donnée par:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Graphe des transitions: exemple

Cette matrice $\mathcal{M}$ peut nous aider à faire une analyse d'atteignabilité. Si on a besoin par exemple de connaître tous les noeuds qui atteins le noeud de sorti $\mathcal{N}_0$, alors, on calcule:

$$[0\ 0\ 0\ 0\ 1]\,\mathcal{M}^T = [1\ 1\ 0\ 0\ 0]$$

et si on veut par exemple savoir quels noeuds sont atteint par le noeud $\mathcal{N}_1$, alors, on calcule:

$$[1\ 0\ 0\ 0\ 0]\,\mathcal{M} = [1\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

donc cette matrice de transition nous donne des informations sur les noeuds qui transitent vers $\mathcal{N}_0$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction basée sur le graphes des transitions: principe

On considère le système PWA défini sur la partition $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{n_r} \mathcal{R}_i$:

$$x(k+1) = A_i x(k) + a_i \tag{15}$$

avec le graphe des transitions qui lui correspond.
si le noeud de sortie $\mathcal{N}_0$ est isolé, alors l'ensemble $\mathbb{X}$ est complètement invariant

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction basée sur le graphes des transitions: Quelques définitions

Définition 1: Pour un domaine donné $\mathcal{R}_i \subset \mathbb{X}$, on définit la sous-région $out\mathcal{R}_i^k$ comme:

$$out\mathcal{R}_i^k = \{x_0 \in \mathcal{R}_i | x_l \in \mathcal{R}_i, \forall l = 1, \cdots, k-1 \wedge x_k \notin \mathbb{X} \text{ avec } \\ x_l = A_i^l x_0 + (I + \cdots + A_i^{l-1}) a_i\}$$

ce qui veut dire que le k-image de $\mathcal{R}_i$ sorte de $\mathbb{X}$ dans k pas en progressant exclusivement à l'intérieur de $\mathcal{R}_i$.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

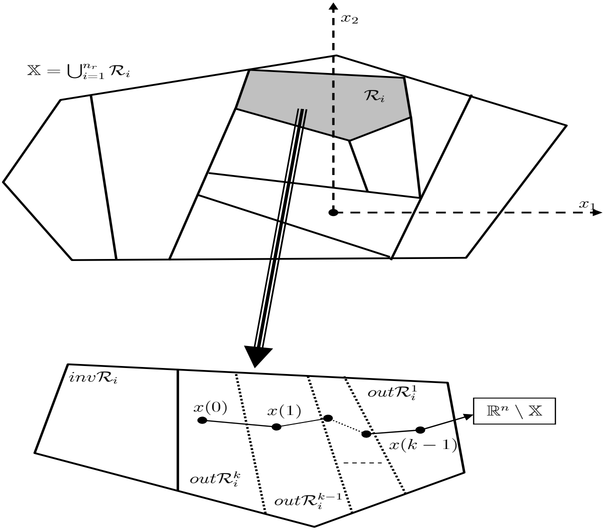
Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction basée sur le graphes des transitions: Quelques définition



Faisabilité et ensembles invariants pour la commande prédictive

Hichem Benlaoukli

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction basée sur le graphes des transitions: Quelques définitions

Définition 2: Pour une région $\mathcal{R}_i$ et un indice donné $k \in \mathbb{N}^*$ le complément de la sous-région à l'égard de $out\mathcal{R}_i^k$ est:

$$inv\mathcal{R}_i^k = \mathcal{R}_i \setminus \bigcup_{s=1}^{k} out\mathcal{R}_i^s$$

Définition 3: La sous-région $out\mathcal{R}_i^\infty$ est définie comme:

$$out\mathcal{R}_i^\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} out\mathcal{R}_i^k$$

et sont complément est: $inv\mathcal{R}_i^\infty = \mathcal{R}_i \setminus out\mathcal{R}_i^\infty$.

Construction basée sur le graphes des transitions: Quelques définitions

Pour chaque noeud connecté au noeud de sortie $\mathcal{N}_0$, la région correspondante est décomposée comme suit:

$$\mathcal{R}_j = inv\mathcal{R}_j^k \cup out\mathcal{R}_j^k$$

où $out\mathcal{R}_j^k$ est le sous-ensemble qui force la transition vers $\mathcal{N}_0$ exclusivement à travers sa dynamique définit pour la région $\mathcal{R}_j$. $inv\mathcal{R}_j^k$ est le complément vis-à-vis la région $\mathcal{R}_j$.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction basée sur le graphes des transitions: Théorème

Une question importante se pose:

Quelles sont les conditions pour lesquelles le calcul de $out\mathcal{R}_j^{\infty}$ se fait en temps fini?

On propose le théorème suivant:

Construction basée sur le graphes des transitions: Théorème

Théorème : Étant donné un système PWA définit sur l'ensemble $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{n_r} \mathcal{R}_i \subset \mathbb{R}^n$ avec $x(k+1) = f_{PWA}(x(k)) = A_i x(k) + a_i$ pour $x(k) \in \mathcal{R}_i$. Pour toute région $\mathcal{R}_i$, une description polytopique finie de la partition:

$$\mathcal{R}_i = inv\mathcal{R}_i^{\infty} \cup out\mathcal{R}_i^{\infty}$$

si $(\mathbb{I} - A_i)^{-1} a_i \notin \mathcal{R}_i$ ou $(\mathbb{I} - A_i)^{-1} a_i \in \mathcal{R}_i$ et $|\lambda(A_i)| < 1$.

Démonstration: voir article *ICCA2009*.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction basée sur le graphes des transitions: exemple numérique

Cet exemple illustre la différence de calcul de l'ensemble invariant entre l'algorithme qui opère par contraction et l'algorithme utilisant le graphe des transitions.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k) \tag{16}$$

Un loi de commande prédictive est construite avec $N = N_u = 5$, $Q = I_2$ et $R = 1$ pour l'ensemble des contraintes:

$$-20 \leqslant y_k \leqslant 20; \quad -1 \leqslant u_k \leqslant 1 \tag{17}$$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

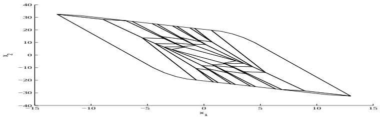
Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

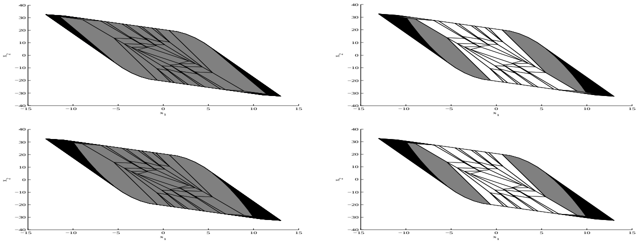
Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Construction basée sur le graphes des transitions: exemple numérique



(i)



(j)

Outline

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Faisabilité du suivi de trajectoire: Formulation du problème

On verra dans cette partie, comment le calcul des ensembles invariant peut nous garantir la faisabilité de la loi de commande prédictive pour le suivi de trajectoire.

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Suivi de trajectoire: Formulation du problème

$$\begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_{k} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} u(k) \tag{18}$$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Suivi de trajectoire: Formulation du problème

$$\begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_k +$$

$$\begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \left(F \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_k + G \right)$$

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Suivi de trajectoire: Formulation du problème

Le problème est équivalent à la formulation précédente.

$$z_{k+1} = f_{PWA}(z_k) + w(z_k) \tag{19}$$

avec $w \in W(z_k)$
$W(z_k)$ est la projection de la solution explicite sur w_N
$W(z_k)$ = polyèdre paramétré

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants
- Introduction
- Construction contractive
- Construction expansive
- Amélioration du temps de calcul
- Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire
- Formulation du problème

Suivi de trajectoire: exemple1

Considérant le système discret définit par:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned} \tag{20}$$

On construit une loi de commande MPC avec $H_p = H_u = 2$, et les facteurs de pondérations $Q = I_2$ et $R = 1$. Les contraintes à satisfaire sont définit par:

$$-15 \leqslant \quad y(k) \quad \leqslant 15 \tag{21}$$

$$-20 \leqslant \quad u(k) \quad \leqslant 20 \tag{22}$$

Voir la démonstration:

Introduction: Formulation de la Commande Prédictive MPC

Solution Explicite

Ensembles invariants

Construction d'ensembles invariants

Introduction

Construction contractive

Construction expansive

Amélioration du temps de calcul

Construction basée sur le graphes des transitions

Faisabilité du suivi de trajectoire

Formulation du problème

Suivi de trajectoire: exemple2

Considérant le système discret définit par:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \tag{23}$$

On construit une loi de commande MPC avec $H_p = H_u = 2$, et les facteurs de pondérations $Q = I_2$ et $R = 1$. Les contraintes à satisfaire sont définit par:

$$-15 \leqslant y(k) \leqslant 15 \tag{24}$$
$$-20 \leqslant u(k) \leqslant 20 \tag{25}$$

Voir la démonstration: