

Commande prédictive rapide du PVTOL et de l'hélicoptère à 4 rotors

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand *et
al.*

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

Nicolas Marchand (gipsa-lab),

Ahmed Chemori (LIRMM), Ahmad Hably (LIRMM),
Guylaine Poulin (LUSSI)

gipsa-lab, Control Systems Department (former LAG)

Grenoble, France



Plan de la présentation

1 Bref positionnement du problème de commande d'un engin dans l'espace

2 Commande du PVTOL

- Modèle du PVTOL
- PVTOL et Commande prédictive
- Principe de l'approche
- Commande en BO du sous-système rotationnel
- Commande en BO du sous-système translationnel
- Boucle fermée
- Stabilité
- Simulations

3 Extension au quadrirotor

4 Conclusions

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

Classification des problèmes de commande des engins 3D

Fast NMPC of PVTOL and X4

Nicolas Marchand et al.

Plan

Commande d'engins 3D

Commande du PVTOL

Modèle PVTOL et CPNL

Principe BO de Σ_1
BO de Σ_2

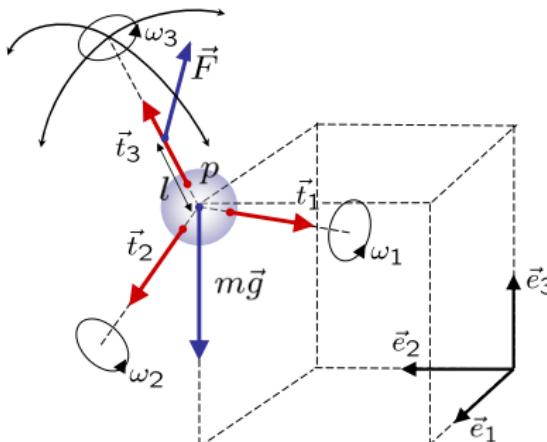
BF

Stabilité

Simulations

Extension au X4

Conclusions



- Commande de 6 variables (3 angles + (x, y, z))
- Problématique dépendante du nombre de DDL de \vec{F}

Classification des problèmes de commande des engins 3D

Fast NMPC of PVTOL and X4

Nicolas Marchand et al.

Plan

Commande d'engins 3D

Commande du PVTOL

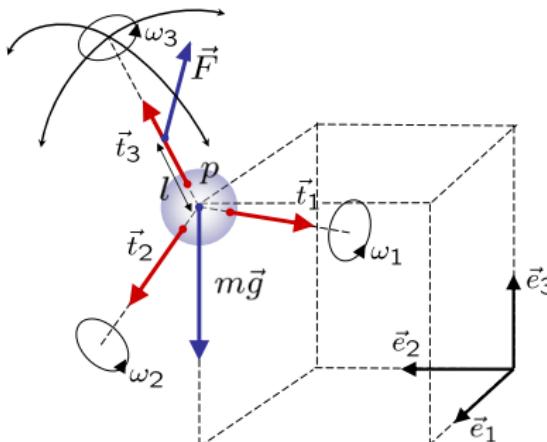
Modèle PVTOL et CPNL

Principe BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au X4

Conclusions



- Commande de 6 variables (3 angles + (x, y, z))
- Problématique dépendante du nombre de DDL de \vec{F}
- 3 DDL \Rightarrow la commande d'attitude peut se découpler de celle de la position

Classification des problèmes de commande des engins 3D

Fast NMPC of PVTOL and X4

Nicolas Marchand et al.

Plan

Commande d'engins 3D

Commande du PVTOL

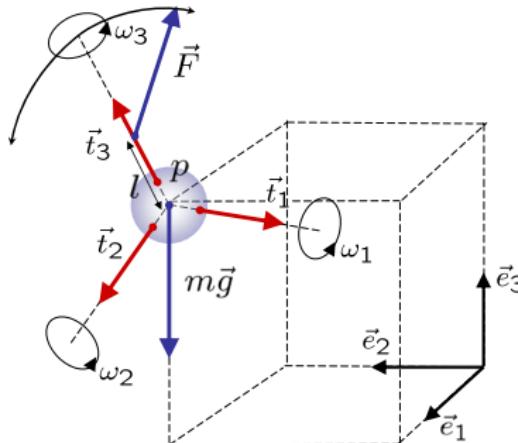
Modèle PVTOL et CPNL

Principe BO de Σ_1
BO de Σ_2

BF
Stabilité
Simulations

Extension au X4

Conclusions



- Commande de 6 variables (3 angles + (x, y, z))
- Problématique dépendante du nombre de DDL de \vec{F}
- 3 DDL \Rightarrow la commande d'attitude peut se découpler de celle de la position
- 2 DDL \Rightarrow couplage entre 1 angle et 2 variables de position : **PVTOL**

Classification des problèmes de commande des engins 3D

Fast NMPC of PVTOL and X4

Nicolas Marchand et al.

Plan

Commande d'engins 3D

Commande du PVTOL

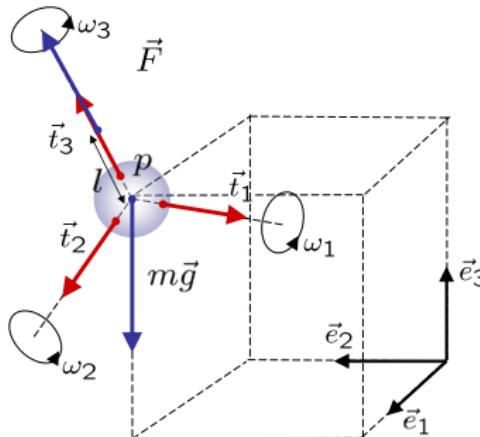
Modèle PVTOL et CPNL

Principe BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au X4

Conclusions



- Commande de 6 variables (3 angles + (x, y, z))
- Problématique dépendante du nombre de DDL de \vec{F}
- 3 DDL \Rightarrow la commande d'attitude peut se découpler de celle de la position
- 2 DDL \Rightarrow couplage entre 1 angle et 2 variables de position : **PVTOL**
- 1 DDL \Rightarrow couplage entre 2 angles et les 3 variables de position : **X4**

Définition du système

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

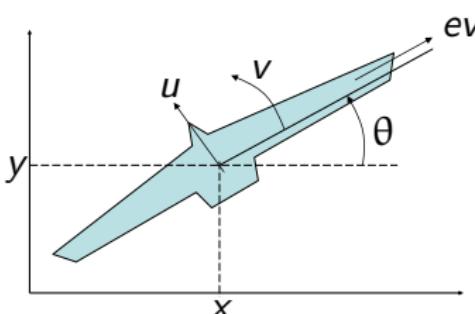
Conclusions

- Le PVTOL (Planar Vertical Take-Off Landing Aircraft)

$$\ddot{x} = -\sin(\theta)u + \varepsilon \cos(\theta)v \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \cos(\theta)u + \varepsilon \sin(\theta)v - 1 \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} = v \quad (3)$$



- 1 : gravité normalisée
- ε : paramètre de couplage (mal connu)
- $u > 0$: poussée positive
- Ne vérifie pas les conditions de Brockett
 ⇒ pas de retour d'état statique continu

PVTOL et littérature associée

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle

PVTOL et
CPNL

Principe

BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité

Simulations

Extension au
X4

Conclusions

- Nombreuses approches
- Deux "*philosophies*" :
 - linéarisation E/S et platitude
 - Lyapunov
- Toutes les approches sont basées sur un changement de coordonnées préliminaire
- Beaucoup supposent qu'il n'y a pas de couplage ($\varepsilon = 0$)
- Peu vérifient la robustesse vis à vis d'une incertitude dans le paramètre de couplage
- Peu gèrent les contraintes de positivité de la poussée et de borne sur le couple de roulis
- Aucune approche ne peuvent gérer des contraintes sur l'état
- Aucune approche prédictive

La commande prédictive

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

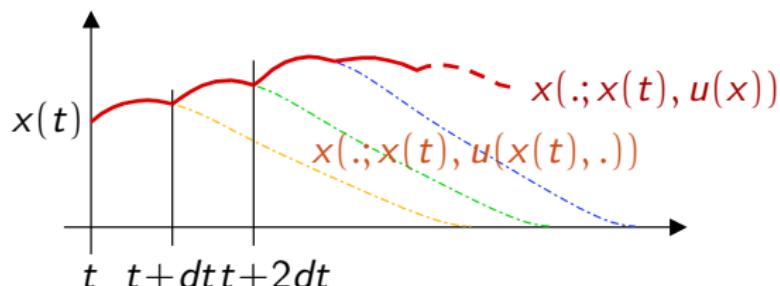
Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions



- La stabilité dépend du choix de $\tau \rightarrow u(x(t), \tau)$
- La commande optimale consiste à choisir

$$u(x(t), \cdot) = \operatorname{Arg} \min_{\tau \rightarrow u(\tau)} J(x(\tau), u(\tau))$$

On peu souvent garantir la stabilité grâce au principe d'optimalité de Bellman.



● Problèmes liés à l'implémentation:

- La plupart du temps, **impossibilité d'avoir une solution analytique** pour les systèmes non linéaires
- Une **solution** numérique approchée est **longue à calculer**
- Une solution numérique approchée pose des **problèmes numériques** (minima locaux, etc.)

● Avantages de la commande prédictive

- Prise en charge des contraintes
- Robustesse (liée à la prédition)
- Approche générique

PVTOL et commande prédictive

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe

BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité

Simulations

Extension au
X4

Conclusions

- PVTOL et commande prédictive : aucun résultat
- Systèmes chaînés et commande prédictive :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u_0 \\ \dot{x} = u_0 Ax + Bu_1 \end{cases} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} & I_{n-1 \times n-1} \\ 0 & 0_{1 \times n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Alimir et Marchand 2003 : orienté temps minimal, convergence globale de l'algorithme garantie, stabilité garantie, temps de calcul $\ll 0.1s$.
- Systèmes chaînés d'ordre 2 (dont le PVTOL sans gravité) et commande prédictive :

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = u_0 \\ \ddot{x} = u_0 Ax + Bu_1 \end{cases} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} & I_{n-1 \times n-1} \\ 0 & 0_{1 \times n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Hably et al. 2005 : orienté temps minimal, convergence globale de l'algorithme garantie, stabilité garantie, temps de calcul $\ll 0.1s$.

Principe de l'approche

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{x} = -\sin(\theta)u + \varepsilon \cos(\theta)v \\ \ddot{y} = \cos(\theta)u + \varepsilon \sin(\theta)v - 1 \end{cases}$$

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \ddot{\theta} = v \end{cases}$$

avec : $u_{\max} \geq u \geq 0$ et $v_{\max} \geq v \geq v_{\min}$

- Stabiliser Σ_1 puis Σ_2 de manière indépendante
- Σ_1 est linéaire
- Σ_2 est linéaire temps variant

Quelques aspects de contrôlabilité

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe

BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité

Simulations

Extension au
X4

Conclusions

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{x} = -\sin(\theta)u + \varepsilon \cos(\theta)v \\ \ddot{y} = \cos(\theta)u + \varepsilon \sin(\theta)v - 1 \end{cases}$$

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \ddot{\theta} = v \end{cases}$$

avec : $u_{\max} \geq u \geq 0$ et $v_{\max} \geq v \geq v_{\min}$

- **Commande prédictive** : à chaque instant t , on cherche
 - $\tau \rightarrow v(\theta(t), \dot{\theta}(t), \tau)$ puis
 - $\tau \rightarrow u(x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t), v, \tau)$
- On ne peut pas stabiliser Σ_1 sans précautions :
 - Si $v \equiv 0$, alors Σ_2 est non contrôlable (obstruction liée à la condition de Brockett)
 - Si $\text{sign}(\theta)$ reste constant et $\varepsilon = 0$, alors, comme $u \geq 0$, Σ_2 est non contrôlable
- θ doit être suffisamment "riche"

Commande de Σ_1

- On augmente le vecteur d'état : $\Theta := (I_\theta, \theta, \dot{\theta})^T$
- On discrétise avec une période T

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe

BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité

Simulations

Extension au
X4

Conclusions

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Theta} = A_\theta \Theta + B_\theta v \\ v_{\max} \geq v \geq v_{\min} \\ A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \text{Échantillonnage de période } T \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{k+1} = A_\theta \Theta_k + B_\theta v_k \\ v_{\max} \geq v_k \geq v_{\min} \\ A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_\theta = \begin{pmatrix} \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

- Chaîne d'intégrateur
- En initialisant $I_\theta(0) = 0$, on garanti que θ change de signe
- On se fixe un horizon de prédiction $t_f = NT$:

$$\Theta_N = A_\theta^N \Theta_0 + \left(A_\theta^{N-1} B_\theta \ A_\theta^{N-2} B_\theta \ \cdots \ B_\theta \right) V$$

- où $V = (v_0 \ v_1 \ \cdots \ v_{N-1})^T$
- et N suffisamment grand de sorte que $v_{\max} \geq v_k \geq v_{\min}$

Commande de Σ_1

\mathcal{P}_1 : Commande de Σ_1

V est choisi comme solution du problème d'optimisation \mathcal{P}_1

$$\mathcal{P}_V : \tilde{V} := \operatorname{Arg} \min_V \sum_{k=1}^n \Theta_k^T Q \Theta_k + r v_{k-1}^2 \quad (4)$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} \Theta_f = A_\theta^N \Theta_0 + (A_\theta^{N-1} B_\theta \ A_\theta^{N-2} B_\theta \ \cdots \ B_\theta) \ V \\ v_{\min} \leq v_i \leq v_{\max} \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

- Problème de programmation quadratique
- $\Theta_f = \Theta_N = A_\theta^N \Theta_0 + (A_\theta^{N-1} B_\theta \ A_\theta^{N-2} B_\theta \ \cdots \ B_\theta) \ V$ correspond à une contrainte de valeur finale
- **Remarque :** si $\Theta = 0$ alors $V = 0$. L'obstruction liée à la condition de Brockett demeure.

Discrétisation de Σ_2

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{x} = -\sin(\theta(t))u + \varepsilon \cos(\theta(t))v(t) \\ \ddot{y} = \cos(\theta(t))u + \varepsilon \sin(\theta(t))v(t) - 1 \end{cases}$$

avec $u_{\max} \geq u \geq 0$

\Updownarrow Échantillonnage de période T

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & x_k - u_k \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau))d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau))d\tau d\nu \\ \dot{x}_{k+1} & = & \dot{x}_k - u_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau))d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau))d\tau \\ y_{k+1} & = & y_k + u_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau))d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau))d\tau d\nu - (2k+1)T \\ \dot{y}_{k+1} & = & \dot{y}_k + u_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau))d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau))d\tau - T \end{array} \right.$$

Fast NMPC of PVTOL and X4

Nicolas Marchand et al.

Plan

Commande d'engins 3D

Commande du PVTOL

Modèle PVTOL et CPNL

Principe

BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité

Simulations

Extension au X4

Conclusions

Discrétisation de Σ_2

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{x} = -\sin(\theta(t))u + \varepsilon \cos(\theta(t))v(t) \\ \ddot{y} = \cos(\theta(t))u + \varepsilon \sin(\theta(t))v(t) - 1 \end{cases}$$

avec $u_{\max} \geq u \geq 0$

\Leftrightarrow Échantillonnage de période T

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - u_k \int_0^T \int_0^\tau \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k - u_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \\ y_{k+1} = y_k + u_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu - (2k+1)T \\ \dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + u_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau - T \end{array} \right.$$



$$c_k := \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau$$

Fast NMPC of PVTOL and X4

Nicolas Marchand et al.

Plan

Commande d'engins 3D

Commande du PVTOL

Modèle PVTOL et CPNL

Principe BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité Simulations

Extension au X4

Conclusions

Discrétisation de Σ_2

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{x} = -\sin(\theta(t))u + \varepsilon \cos(\theta(t))v(t) \\ \ddot{y} = \cos(\theta(t))u + \varepsilon \sin(\theta(t))v(t) - 1 \end{cases}$$

avec $u_{\max} \geq u \geq 0$

\Leftrightarrow Échantillonnage de période T

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - u_k \int_0^T \int_0^\tau \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k - u_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \\ y_{k+1} = y_k + u_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\tau \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu - (2k+1)T \\ \dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + u_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau - T \end{array} \right.$$

$s_k := \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau$
 $c_k := \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau$

Discrétisation de Σ_2

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{x} = -\sin(\theta(t))u + \varepsilon \cos(\theta(t))v(t) \\ \ddot{y} = \cos(\theta(t))u + \varepsilon \sin(\theta(t))v(t) - 1 \end{cases}$$

avec $u_{\max} \geq u \geq 0$

\Leftrightarrow Échantillonnage de période T

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - u_k \int_0^T \int_0^\tau \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k - u_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \\ y_{k+1} = y_k + u_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu - (2k+1)T \\ \dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + u_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau - T \end{array} \right.$$

$$s_k := \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau$$

$$c_k := \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad C_k := \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu$$

Fast NMPC of PVTOL and X4

Nicolas Marchand et al.

Plan

Commande d'engins 3D

Commande du PVTOL

Modèle PVTOL et CPNL

Principe

BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité

Simulations

Extension au X4

Conclusions

Discrétisation de Σ_2

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{x} = -\sin(\theta(t))u + \varepsilon \cos(\theta(t))v(t) \\ \ddot{y} = \cos(\theta(t))u + \varepsilon \sin(\theta(t))v(t) - 1 \end{cases}$$

avec $u_{\max} \geq u \geq 0$

\Leftrightarrow Échantillonnage de période T

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - u_k \int_0^T \int_0^\tau \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k - u_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \\ y_{k+1} = y_k + u_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu - (2k+1)T \\ \dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + u_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau - T \end{array} \right.$$

$$s_k := \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad S_k := \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu$$

$$c_k := \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad C_k := \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu$$

Fast NMPC of PVTOL and X4

Nicolas Marchand et al.

Plan

Commande d'engins 3D

Commande du PVTOL

Modèle PVTOL et CPNL

Principe

BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité

Simulations

Extension au X4

Conclusions

Discrétisation de Σ_2

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \ddot{x} = -\sin(\theta(t))u + \varepsilon \cos(\theta(t))v(t) \\ \ddot{y} = \cos(\theta(t))u + \varepsilon \sin(\theta(t))v(t) - 1 \end{cases}$$

avec $u_{\max} \geq u \geq 0$

\Leftrightarrow Échantillonnage de période T

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - u_k \int_0^T \int_0^\tau \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k - u_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \\ y_{k+1} = y_k + u_k \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu + \varepsilon v_k \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu - (2k+1)T \\ \dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + u_k \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau + \varepsilon v_k \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau - T \end{array} \right.$$

Comment calculer c_k , s_k , C_k et S_k sans intégrer ?

$$\begin{aligned} s_k &:= \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau & S_k &:= \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ c_k &:= \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau & C_k &:= \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \end{aligned}$$

Les intégrales de Fresnel

- Pour $t \in [0, T]$, θ est de la forme

$$\theta(kT + \tau) = \underbrace{\alpha_k}_{\theta_k} + \underbrace{\beta_k}_{\dot{\theta}_k} \tau + \underbrace{\gamma_k}_{\frac{1}{2} v_k} \tau^2$$

- Le calcul de c_k , s_k puis de C_k et S_k (par intégration par parties) se ramène aux

Intégrales de Fresnel

$$s(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu^2\right) d\nu$$

$$c(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu^2\right) d\nu$$

- Connues en électromagnétisme et optique
- De très efficaces suites convergentes existent
(22 itérations, précision de 10^{-20} , en $5e^{-5}s$ sous Matlab)

Les intégrales de Fresnel

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1

BO de Σ_2

BF

Stabilité

Simulations

Extension au
X4

Conclusions

① If $\gamma_k \neq 0$, taking $a_k := \frac{\beta_k}{2\gamma_k}$ and $b_k := \alpha_k - \frac{\beta_k^2}{4\gamma_k}$ one has:

$$s_k = \frac{1}{\gamma_k} \sqrt{\frac{\pi |\gamma_k|}{2}} \cos(b_k) \left[s\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}(T + a_k)\right) - s\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}a_k\right) \right] + \sqrt{\frac{\pi}{2|\gamma_k|}} \sin(b_k) \left[c\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}(T + a_k)\right) - c\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}a_k\right) \right]$$

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{2|\gamma_k|}} \cos(b_k) \left[c\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}(T + a_k)\right) - c\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}a_k\right) \right] - \frac{1}{\gamma_k} \sqrt{\frac{\pi|\gamma_k|}{2}} \sin(b_k) \left[s\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}(T + a_k)\right) - s\left(\sqrt{\frac{2|\gamma_k|}{\pi}}a_k\right) \right]$$

S_k and C_k are obtained integrating s_k and c_k by parts:

$$S_k = (T + \frac{\beta_k}{2\gamma_k})s_k + \frac{1}{2\gamma_k} [(\cos(\alpha_k + \beta_k T + \gamma_k T^2) - \cos(\alpha_k))]$$

$$C_k = (T + \frac{\beta_k}{2\gamma_k})c_k - \frac{1}{2\gamma_k} [(\sin(\alpha_k + \beta_k T + \gamma_k T^2) - \sin(\alpha_k))]$$

② If $\gamma_k = 0$ and $\beta_k \neq 0$, one has

$$s_k = \frac{1}{\beta_k} [\cos(\alpha_k) - \cos(\alpha_k + \beta_k T)] \quad S_k = -\frac{1}{\beta} (c_k - T \cos(\alpha_k))$$

$$c_k = \frac{1}{\beta_k} [\sin(\alpha_k + \beta_k T) - \sin(\alpha_k)] \quad C_k = \frac{1}{\beta} (s_k - T \sin(\alpha_k))$$

③ If $\gamma_k = 0$ and $\beta_k = 0$, then

$$s_k = T \sin(\alpha_k) \quad S_k = \frac{T^2}{2} \sin(\alpha_k)$$

$$c_k = T \cos(\alpha_k) \quad C_k = \frac{T^2}{2} \cos(\alpha_k)$$

Commande de Σ_2

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations
Extension au
X4

Conclusions

- On pose $\zeta = (x, \dot{x}, y, \dot{y})^T$

- On a :

$$\zeta_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{t_f^2}{2} \\ -t_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t_f & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta_0 + (Q_1 \Gamma + T Q_3 \Gamma D_N) U + e(Q_2 \Gamma + T Q_4 \Gamma D_N) V$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_N = \text{diag}(N-1, N-2, \dots, 1, 0) \\ Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ s_0 & s_1 & \dots & s_{N-1} \\ C_0 & C_1 & \dots & C_{N-1} \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{N-1} \end{pmatrix} \quad s_k := \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad S_k := \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ c_k := \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad C_k := \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \end{array} \right.$$



Commande de Σ_2

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations
Extension au
X4

Conclusions

- On pose $\zeta = (x, \dot{x}, y, \dot{y})^T$

- On a :

$$\zeta_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{t_f^2}{2} \\ -t_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t_f & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta_0 + (Q_1 \Gamma + T Q_3 \Gamma D_N) U + e(Q_2 \Gamma + T Q_4 \Gamma D_N) V$$

avec :

Effet de Σ_1 vu comme
un élément temps variant

$$\left\{ \begin{array}{l} D_N = \text{diag}(N-1, N-2, \dots, 1, 0) \\ Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ s_0 & s_1 & \dots & s_{N-1} \\ C_0 & C_1 & \dots & C_{N-1} \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{N-1} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} s_k := \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad S_k := \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ c_k := \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad C_k := \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \end{array} \right.$$

Commande de Σ_2

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations
Extension au
X4

Conclusions

- On pose $\zeta = (x, \dot{x}, y, \dot{y})^T$

- On a :

$$\zeta_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{t_f^2}{2} \\ -t_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t_f & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta_0 + (Q_1 \Gamma + T Q_3 \Gamma D_N) U + e(Q_2 \Gamma + T Q_4 \Gamma D_N) V$$

Vecteur de
commande



avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_N = \text{diag}(N-1, N-2, \dots, 1, 0) \\ Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ s_0 & s_1 & \dots & s_{N-1} \\ C_0 & C_1 & \dots & C_{N-1} \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{N-1} \end{pmatrix} \quad s_k := \int_0^T \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad S_k := \int_0^T \int_0^\nu \sin(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \\ c_k := \int_0^T \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau \quad C_k := \int_0^T \int_0^\nu \cos(\theta(kT + \tau)) d\tau d\nu \end{array} \right.$$

Commande de Σ_2

\mathcal{P}_2 : Commande de Σ_2

U est choisi comme solution du problème d'optimisation \mathcal{P}_2

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

$$\mathcal{P}_u : \tilde{U} := \operatorname{Arg} \min_U \sum_{k=1}^n \zeta_k^T O \zeta_k + p u_{k-1}^2 \quad (5)$$

sous les contraintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{t_f^2}{2} \\ -t_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t_f & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \zeta_0 + (Q_1 \Gamma + T Q_3 \Gamma D_N) U + e(Q_2 \Gamma + T Q_4 \Gamma D_N) V \\ 0 = u_{\min} \leq U_i \leq u_{\max} \quad \text{for } i = 0, \dots, N-1 \end{array} \right.$$

- Problème de programmation quadratique
- $\zeta_f = \zeta_N$ correspond à une contrainte sur la valeur finale
- Pour T suffisamment petit et $\theta_f \neq \theta_0$ alors
 $\operatorname{rank}(Q_1 \Gamma + T Q_3 \Gamma D_N) = 4$

Récapitulatif

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

- ➊ Pour toute condition initiale (Θ_0, ζ_0) et point visé (Θ_f, ζ_f) tels que $\theta_f \neq \theta_0$, $\Theta_0 \neq 0$ et $I_\theta = 0$
- ➋ pour toute période d'échantillonnage T suffisamment petite
- ➌ pour tout horizon NT suffisamment grand

on peut obtenir par programmation quadratique, les commandes **en boucle ouverte** U et V qui amènent le PVTOL de (Θ_0, ζ_0) à (Θ_f, ζ_f) en NT .

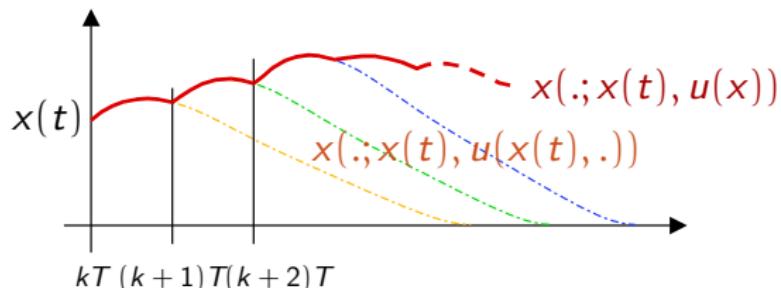
Si p est grand, la solution tendra à minimiser l'énergie de poussée utilisée :

$$E_u = \int_t^{t+NT} u(\tau) d\tau$$

où u représente la poussée verticale de l'engin

La boucle fermée

- La commande obtenue n'est pas directement utilisable dans un schéma de commande prédictive car il reste des singularités



- On se place dans un **contexte de stabilisation**
- On veut que le système aille en (Θ_f, ζ_f) et **y reste**
- (Θ_f, ζ_f) doit avoir la structure particulière:

$$(\Theta_f, \zeta_f) = (0, 0, 0, x_f, 0, y_f, 0)$$

- Singularités : $\theta_0 \neq \theta_f, \Theta_0 \neq 0 \Rightarrow \Theta_0 \neq 0$
(Obstruction de Brockett)

Levée de l'obstruction de Brockett

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2

BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

- Principe : Appliquer une commande qui "translate" l'avion
- En effet, à la verticale du point visée, une commande nulle nous permet de rejoindre le point visé
- On applique pendant δT les commandes :

$$v = -\frac{\bar{v}}{\theta_1 + \theta_2} \left[\theta_1 \operatorname{sat}\left(\frac{y_1(\theta_1 + \theta_2)}{\bar{v}}\right) + \theta_2 \operatorname{sat}\left(\frac{y_2(\theta_1 + \theta_2)}{\bar{v}}\right) \right]$$
$$u = \max\left(0, \operatorname{sat}_{u^{\max}}\left(\frac{1 - \varepsilon \sin \theta}{\cos \theta}\right)\right)$$

La boucle fermée

Algorithme

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2

BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

- **Étape 0:** Fixer l'horizon de prédiction $t_f := NT$
- **Étape 1:** Calculer à travers la solution de \mathcal{P}_u et \mathcal{P}_v l'ensemble \mathcal{C} des commandes admissibles définies par:

$$\mathcal{C}(z(kT), \Theta(kT), z_f, \Theta_f, N, \Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} U(n, \delta, \hat{V}, z(kT), z_f) \\ V(n, \delta, \Theta(kT), \Theta_f) \end{pmatrix}, \delta \in \{0, \dots, \Delta\}, n \in \{0, \dots, N\} \right\}$$

- **Étape 2:** Si $\mathcal{C} = \emptyset \Rightarrow$ pas de commandes (U, V) vérifiant les contraintes \Rightarrow augmenter N et aller à l'étape 1. Sinon, prendre

$$\begin{pmatrix} U^{\text{opt}}(kT) \\ V^{\text{opt}}(kT) \end{pmatrix} := \underset{(U, V) \in \mathcal{C}}{\text{Arg min}} J(U, V)$$

où $J(U, V) = U^T U + \mu V^T V$ avec par convention $J((\cdot), (\cdot)) = 0$ si $(z(kT), \Theta(kT)) = (z_f, \Theta_f)$

- **Étape 3:** La loi de commande en boucle fermée est alors donnée par:
 - ◊ si $(U^{\text{opt}}, V^{\text{opt}})$ sont des vecteurs vides:

$$\begin{cases} u(z(kT), \Theta(kT)) := 1 \\ v(z(kT), \Theta(kT)) := 0 \end{cases}$$

- ◊ sinon la commande en BF est le premier élément de $(U^{\text{opt}}, V^{\text{opt}})$:

$$\begin{cases} u(z(kT), \Theta(kT)) := u_0^{\text{opt}} \\ v(z(kT), \Theta(kT)) := v_0^{\text{opt}} \end{cases}$$

Stabilité

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

● Principe d'invariance

$$(\hat{U}_k, \hat{V}_k) = ((\hat{u}_{k_0}, \hat{u}_{k_1}, \dots), (\hat{v}_{k_0}, \hat{v}_{k_1}, \dots))$$

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

Stabilité

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

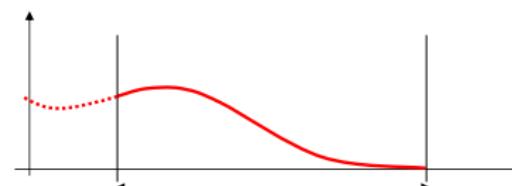
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

• **Principe d'invariance**

$$(\hat{U}_k, \hat{V}_k) = (\underbrace{(\hat{u}_{k_0}, \hat{u}_{k_1}, \dots)}_{\in \mathcal{C}_k}, \underbrace{(\hat{v}_{k_0}, \hat{v}_{k_1}, \dots)}_{\in \mathcal{C}_k})$$



Stabilité

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

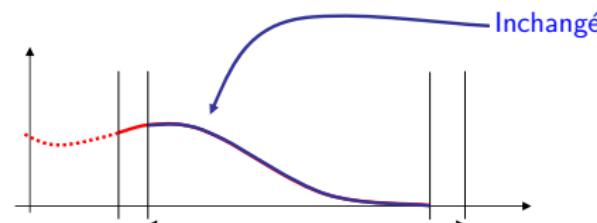
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

$$(\hat{U}_k, \hat{V}_k) = ((\hat{u}_{k_0}, \underbrace{\hat{u}_{k_1}, \dots}_{\in \mathcal{C}_{k+1}}), (\hat{v}_{k_0}, \underbrace{\hat{v}_{k_1}, \dots}_{\in \mathcal{C}_{k+1}}))$$



Stabilité

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

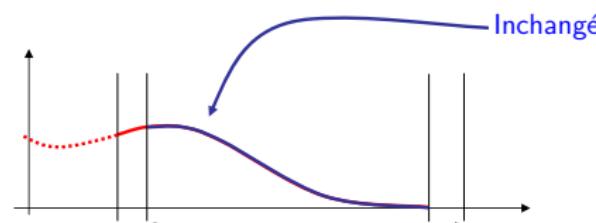
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

$$(\hat{U}_k, \hat{V}_k) = ((\hat{u}_{k_0}, \underbrace{\hat{u}_{k_1}, \dots}_{\in \mathcal{C}_{k+1}}), (\hat{v}_{k_0}, \underbrace{\hat{v}_{k_1}, \dots}_{\in \mathcal{C}_{k+1}}))$$



Le coût associé à la trajectoire bleu est nécessairement plus faible que celui associé à la trajectoire rouge : J_k décroît

Stabilité

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

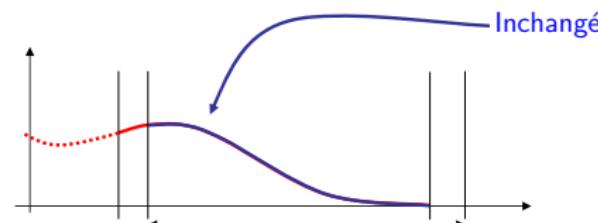
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

• Principe d'invariance

$$(\hat{U}_k, \hat{V}_k) = ((\hat{u}_{k_0}, \underbrace{\hat{u}_{k_1}, \dots}_{\in \mathcal{C}_{k+1}}), (\hat{v}_{k_0}, \underbrace{\hat{v}_{k_1}, \dots}_{\in \mathcal{C}_{k+1}}))$$



Le coût associé à la trajectoire bleu est nécessairement plus faible que celui associé à la trajectoire rouge : J_k décroît

On conclue à la **stabilité** grâce au principe d'invariance de Lasalle.

Stabilisation autour de l'origine

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

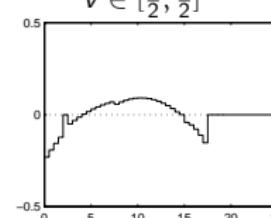
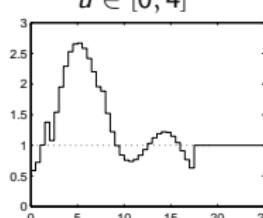
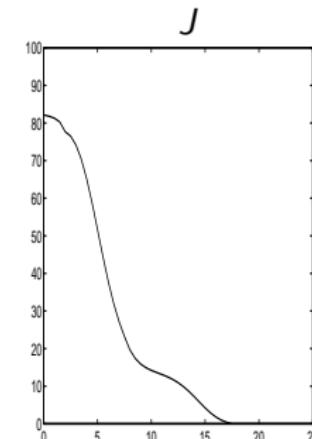
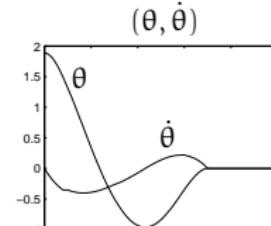
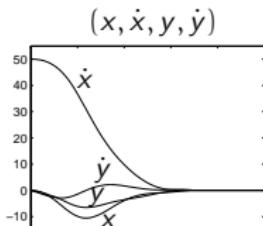
Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions



Évolution pour :

- $(x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)) = (50, 0, 0, 0, \frac{3\pi}{5}, 0)$ et $(x_f, y_f) = (0, 0)$
- $\varepsilon = 0$, $T = 0.5\text{ s}$ et $t_f = 20\text{ s}$
- $\Delta = 1$

Stabilisation autour d'un point

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

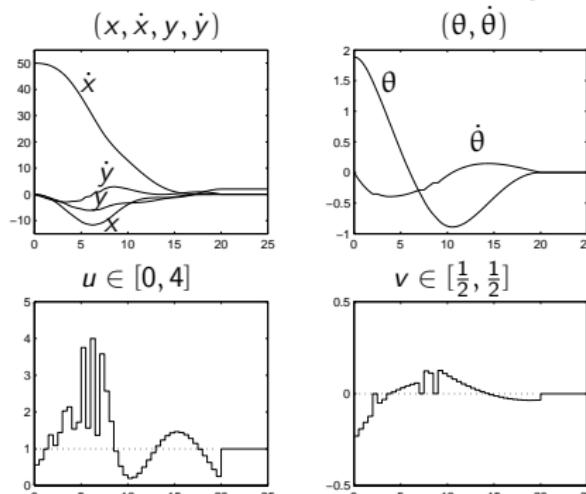
Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions



Évolution pour :

- $(x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)) = (50, 0, 0, 0, \frac{3\pi}{5}, 0)$ et $(x_f, y_f) = (0, 2)$
- $\varepsilon = 0$, $T = 0.5\text{s}$ et $t_f = 20\text{s}$
- $\Delta = 1$

Robustesse

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

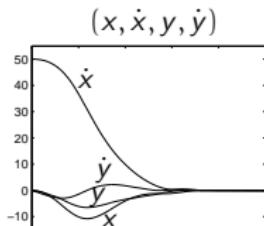
Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

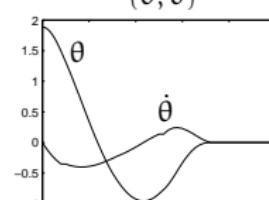
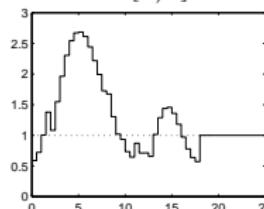
Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

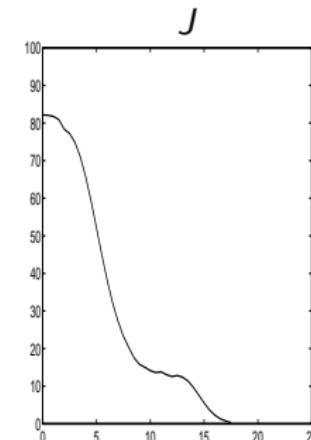
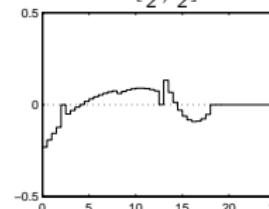
Conclusions



$$u \in [0, 4]$$



$$v \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

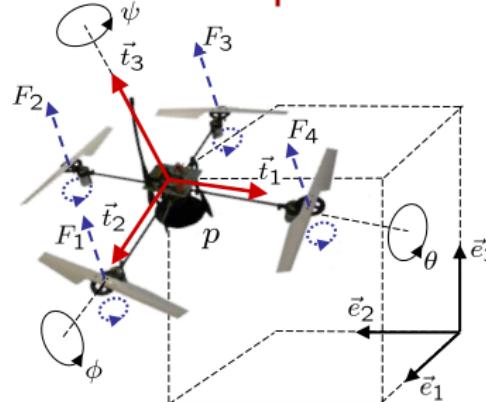


J

Évolution pour :

- $\varepsilon = 0.15$, supposé nul pour le calcul de la commande, $T = 0.5\text{ s}$ et $t_f = 20\text{ s}$
- $(x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)) = (50, 0, 0, 0, \frac{3\pi}{5}, 0)$ et $(x_f, y_f) = (0, 0)$
- $\Delta = 1$

Extension au quadrirotor



- Modèle du X4 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & u(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \ddot{y} & = & u(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \ddot{z} & = & -1 + u(\cos \phi \cos \theta) \\ \ddot{\theta} & = & v_\theta \\ \ddot{\phi} & = & v_\phi \\ \ddot{\psi} & = & v_\psi \end{array} \right.$$

- On développe tous les produits de fonctions trigonométriques en utilisant les formules de Werner

Extension au quadrirotor

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

- On obtient :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{u}{4}[\sin(\vartheta^1) - \sin(\vartheta^2) + \sin(\vartheta^3) - \sin(\vartheta^4) + 2\cos(\varphi^1) - 2\cos(\varphi^2)] \\ \ddot{y} &= \frac{u}{4}[\cos(\vartheta^1) - \cos(\vartheta^2) - \cos(\vartheta^3) + \cos(\vartheta^4) - 2\sin(\varphi^1) - 2\sin(\varphi^2)] \\ \ddot{z} &= -g + \frac{u}{2}[\cos(\varphi^3) + \cos(\varphi^4)] \\ \ddot{\phi} &= v_\phi \\ \ddot{\theta} &= v_\theta \\ \ddot{\psi} &= v_\psi\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\vartheta^1 &:= \phi - \psi + \theta \\ \vartheta^2 &:= \phi - \psi - \theta \\ \vartheta^3 &:= \phi + \psi + \theta \\ \vartheta^4 &:= \phi + \psi - \theta \\ \varphi^1 &:= \phi - \psi \\ \varphi^2 &:= \phi + \psi \\ \varphi^3 &:= \phi - \theta \\ \varphi^4 &:= \phi + \theta\end{aligned}$$

- On peut appliquer une discréétisation du système en utilisant les intégrales de Fresnel

Extension au quadrirotor

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

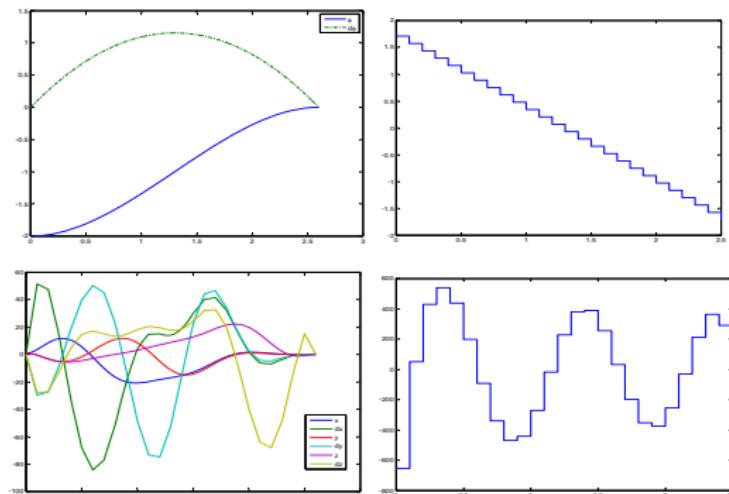
Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF
Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

- Les commandes en BO s'obtiennent comme pour le PVTOL (optimisation quadratique linéaire)
- On obtient des choses trajectoires du genre :



Conclusions

Fast NMPC of
PVTOL and
X4

Nicolas
Marchand et
al.

Plan

Commande
d'engins 3D

Commande du
PVTOL

Modèle
PVTOL et
CPNL

Principe
BO de Σ_1
BO de Σ_2
BF

Stabilité
Simulations

Extension au
X4

Conclusions

- Méthode numériquement efficace
- Stabilisation prouvée formellement
- D'un point de vue théorique, la commande prédictive fait un "pont" entre les approches temps variant et statiques
- Bonnes performances malgré la "sous" optimalité
- Approche polyvalente que l'on peut orienter à volonté temps minimal, énergie minimale ou état minimal
- Contraintes sur l'état possibles

-  G. Poulin, A. Chemori, and N. Marchand.
Minimum energy oriented global stabilizing control of the PVTOL aircraft.
International Journal of Control, 80(3):430–442, 2007.

-  A. Chemori and N. Marchand.
Global discrete time stabilization of the PVTOL aircraft based on a fast predictive controller.
In *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.

-  A. Hably, N. Marchand, and M. Alamir.
Constrained minimum time oriented stabilization of extended chained form systems.
In *joint IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conference*, Seville, Spain, 2005.

-  M. Alamir and N. Marchand.
Constrained sub-optimal feedback control for minimum-time stabilization of nonholonomic systems in chained form.
Journal of Optimization Theory and Applications, 118(2):229–244, 2003.

-  N. Marchand, A. Chemori, and G. Poulin.
Modélisation et Commande embarquée d'objets volants miniatures, chapter Approches prédictives pour la stabilisation en temps discret de l'avion planaire décollage vertical.
Hermès, 2007.