

**Synthèse de contrôleurs prédictifs à base d'état
pour la commande des systèmes MIMO discrets à
non-minimum de phase**

***K. Nagoudi-Layerle, N. Langlois,
H. Chafouk***

Plan

- Problématique
- La commande prédictive à base d'état
- Méthode proposée pour les systèmes MIMO
- Exemple d'application
- Conclusion

Plan

-Problématique

- La commande prédictive à base d'état
- Méthode proposée pour les systèmes MIMO
- Exemple d'application
- Conclusion

Problématique

- **Problèmes d'instabilité associés à la commande prédictive**
- Choix des paramètres N_1 , N_2 , N_u et $\lambda \Rightarrow$ méthodes de réglage [1]
- Existence de pôles instables \Rightarrow retour d'état [2]
- Existence de zéros instables \Rightarrow
 - commande prédictive à base de sortie [3]
 - commande prédictive à base d'état [4]

[1] G. Dumont, Elnaggar Asharaf, Elshafei, Perturbation analysis of GPC with one-step control horizon Automatica 1991

[2] Peter J. Gawthrop and Eric Ronco. Predictive pole-placement control with linear models. Automatica, 2000

[3] R. Marquez, M. Fliess, Towards a module-theoretic approach to discrete-time linear predictive control. (MTNS'2000)

[4] K. N. Layerle, N. Langlois, H. Chafouk Synthèse de contrôleurs prédictifs à base d'état pour la commande Des systèmes MIMO discrets à non-minimum de phase STA'07

Plan

- Problématique
- La commande prédictive à base d'état**
- Méthode proposée pour les systèmes MIMO
- Exemple d'application
- Conclusion

La commande prédictive à base d'état

- **Principe**

Soit le système discret MIMO suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$\Delta u(k)$ la variation du signal de commande

$y(k)$ la sortie

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + B\Delta u(k) + L[y(k) - C\hat{x}(k)] \\ \hat{y}(k) = C\hat{x}(k) \end{cases}$$

L est la matrice gain de l'observateur

$$\xi(k) = y(k) - \hat{y}(k)$$

La commande prédictive à base d'état

le principe de la GPC à base d'état se résume au calcul des variations futures de la commande

$$[\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+N_2)]$$

à partir de la minimisation du critère quadratique J :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(k+j) - y_c(k+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(k+j-1)]^2$$

N_u , N_1 et N_2 horizon de commande, les horizons minimum et maximum de prédiction

\hat{y} et y_c la sortie estimée du système et la consigne désirée

Rappel sur la commande prédictive

Sortie estimée :

$$\hat{y}(k) = G\Delta u(k) + MA\hat{x}(k) + ML\xi(k)$$

La minimisation de J =>

$$\Delta u(k) = [G^T G - \lambda I]^{-1} G^T [y_c(k) - MA\hat{x}(k) - ML\xi(k)]$$

$$G = \begin{bmatrix} CB & & & & \\ CAB & CB & & & \\ \vdots & CAB & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & CB \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{N_2-1}B & CA^{N_2-2}B & \dots & CA^{N_2-N_u-1}B & \end{bmatrix}$$

$$M = [C \ CA \ \dots \ CA^{N_2-1}]^T$$

Plan

- Problématique
- La commande prédictive à base d'état
- Méthode proposée pour les systèmes MIMO**
- Exemple d'application
- Conclusion

1 : Découplage du Système MIMO

Incrément de sortie :

$$y_i(k + d_i) = c_i A^{d_i} x(k) + c_i A^{d_i - 1} B u(k) \\ + \dots + c_i B u(k + d_i - 1)$$

d_i l'indice caractéristique

Equations relatives à chaque composante du vecteur de sortie Y :

$$\begin{bmatrix} y_1(k + d_1) \\ \vdots \\ y_s(k + d_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} \\ \vdots \\ c_s A^{d_s} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_s A^{d_s - 1} B \end{bmatrix} u(k)$$

1 : Découplage du Système MIMO (suite)

$$Y(k + d) = \Delta_0 x(k) + \Delta_1 u(k)$$

En supposant que Δ_1 soit inversible le système est découplable (condition nécessaire et suffisante)

$$u(k) = \Delta_1^{-1}(\nu(k) - \Delta_0 x(k))$$

$u(k)$ la loi de commande découplante

$\nu(k)$ est la consigne du système

1 : Découplage du Système MIMO (suite)

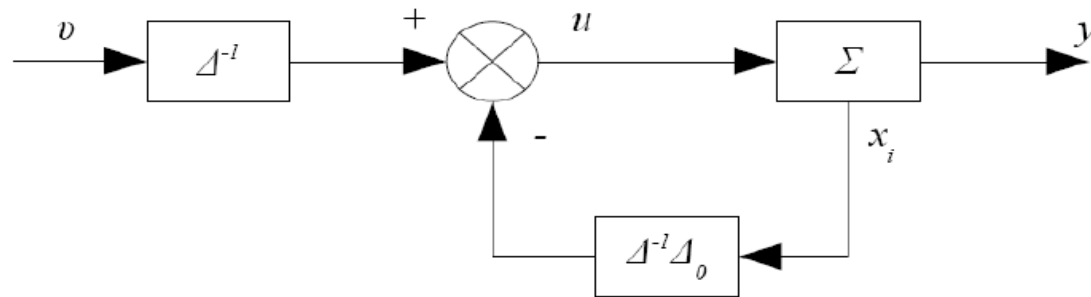


FIG.1. Loi de commande découplante des systèmes physiques

Le système s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}\nu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$\bar{A} = A - B\Delta_1^{-1}\Delta_0 \text{ et } \bar{B} = B\Delta_1^{-1}$$

1 : Découplage du Système MIMO (suite et fin)

Le système est alors bien découplé en s chaînes de retards purs qui constituent les sous-systèmes découplés

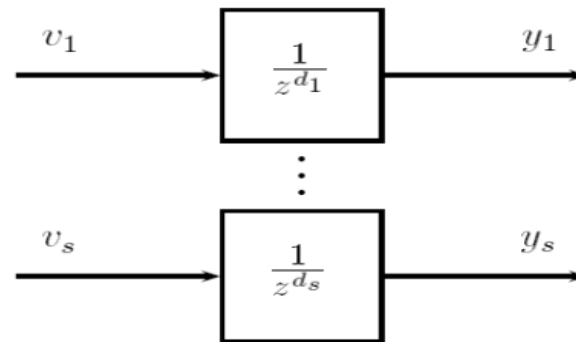


Fig. 2. Chains of decoupled input-output subsystems

2 : Changement de base

- Calcul des matrices de changement de base

Dans le but de mettre sous forme blocs diagonales les différentes matrices d'états découplables. Un ou plusieurs changement de base seront effectués

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(k+1) = \begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \vdots \\ \xi_s(k+1) \end{bmatrix} = T x(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{bmatrix} \xi(k) + \begin{bmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_s \end{bmatrix} \nu(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_s \end{bmatrix} \xi(k) \end{array} \right.$$

$$\text{Avec } T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_s \end{bmatrix} \text{ et } T_i = [c_i \ c_i A \ \dots \ c_i A^{d_i-1}]^T$$

2 : Changement de base (suite)

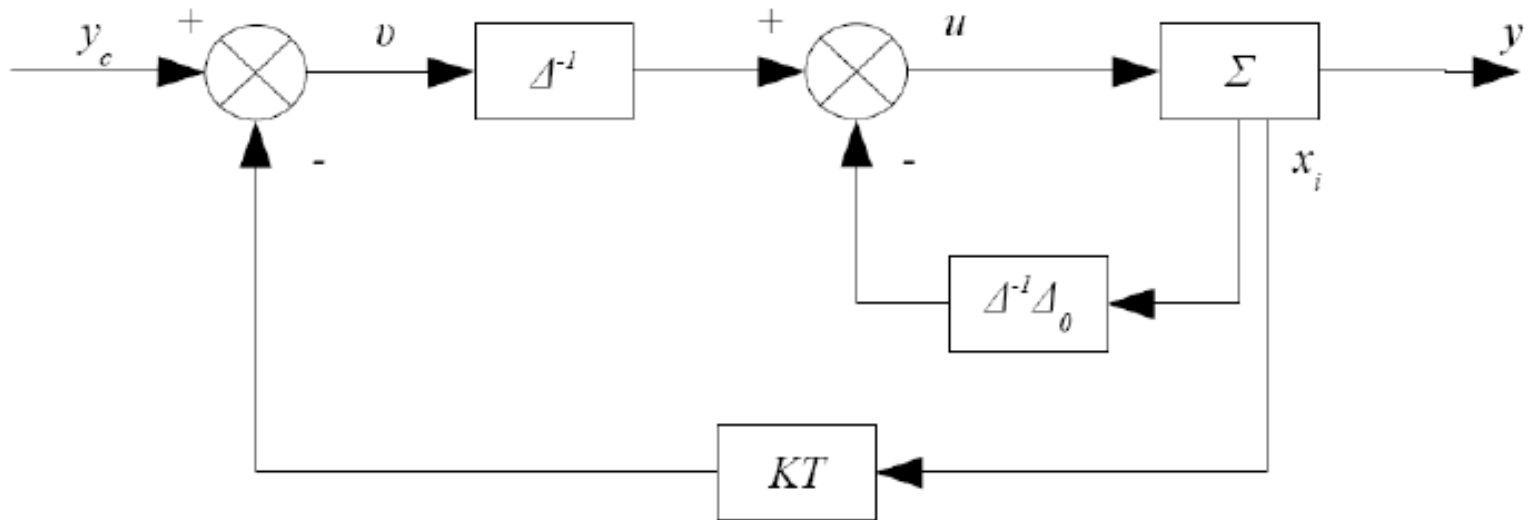
La nouvelle représentation d'état est alors exprimée dans la nouvelle base par

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\nu(k) \\ y(k) = \tilde{C}\xi(k) \end{cases}$$

$$\tilde{A} = T\bar{A}T^{-1}, \tilde{B} = T\bar{B} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = \bar{C}T^{-1}$$

3 : Modification de la dynamique du système MIMO découplé

• **Modification de la dynamique du système découplé**



$$\begin{aligned} \nu(k) &= -\tilde{K} \xi(k) + y_c(k) = -\tilde{K} T x(k) + y_c(k) \\ &= -K x(k) + y_c(k) \end{aligned}$$

gain \tilde{K}_i (associé au sous-système i)

4 : Application de la commande prédictive à base d'état

- Détermination des matrices de prédiction

Critère à minimiser :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_{2m}} [\hat{y}_m(k+j) - y_{c_m}(k+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_{u_i}} [\Delta_1 u_i(k+j-1)]^2$$

N_{2m} et N_{u_i} : horizons de prédiction et de commande

Variation du signal de commande :

$$u(k) = [G_{mi}^T G_{mi} - \lambda I]^{-1} G_{mi}^T [y_{c_m} - M_{mi} A_{mi} \hat{x}(k) - M_{mi} L_{mi} \xi(k)]$$

4 : Application de la commande prédictive à base d'état (suite)

$$G_{mi} = \begin{bmatrix} C_{mi}\tilde{B}_{mi} & & & & \\ C_{mi}\tilde{A}_{mi}\tilde{B}_{mi} & C_{mi}\tilde{B}_{mi} & & & \\ \vdots & C_{mi}\tilde{A}_{mi}\tilde{B}_{mi} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_{mi}\tilde{B}_{mi} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{mi}\tilde{A}_{mi}^{N_2-1}\tilde{B}_{mi} & C_{mi}\tilde{A}_{mi}^{N_2-2}\tilde{B}_{mi} & \cdots & C_{mi}\tilde{A}_{mi}^{N_2-N_u-1}\tilde{B}_{mi} & \end{bmatrix}$$

$$M_{mi} = [C_{mi} \ C_{mi}\tilde{A}_{mi} \ \cdots \ C_{mi}\tilde{A}_{mi}^{N_2-1}]^T$$

Les triplets (A_{mi}, B_{mi}, C_{mi}) représentent les nouvelles matrices d'état des m systèmes SISO

Plan

- Problématique
- La commande prédictive à base d'état
- Méthode proposée pour les systèmes MIMO
- Exemple d'application**
- Conclusion

Exemple d'application

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0102 & 0 \\ 0.0203 & 1.0306 & 0 \\ 0.0102 & 0.0103 & 1.0101 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0.0102 & 0 \\ 0.0001 & 0.0101 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(k) \end{cases}$$

Pôles et zéros du système :

Zéros{1,1} : 0.9900

Zéros{1,2} : 0

Zéros{2,1} : -1.0168, 0.9900

Zéros{2,2} : 0

Pôles{1,1} : 1.0363, 0.9944

Pôles{1,2} : 0

Pôles{2,1} : 1.0363, 1.0101, 0.9944

Pôles{2,2} : 1.0101

$$d_1 = 1, d_2 = 1$$

Exemple d'application (suite)

Après avoir changé de base et choisi la matrice

$$T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1000 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0.35 & -0.20 & 0 \\ 0 & 0 & -0.999 \end{bmatrix}$$

l'application de la méthode proposée conduit
au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.993 & 0.004 & 0 \\ -1.343 & -0.154 & 0 \\ 0 & 0 & 0.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0.995 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y_c(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Exemple d'application

Fonction de transfert :

$$H = \left[\begin{array}{c} \text{Sous-système 1} \\ \frac{z-0.99}{z^2-0.8391z-0.1475} \\ 0 \\ \text{Sous-système 2} \\ 0 \\ \frac{1}{z-0.999} \end{array} \right]$$

Exemple d'application (suite)

- GPC appliquée sur le système donné sans découplage

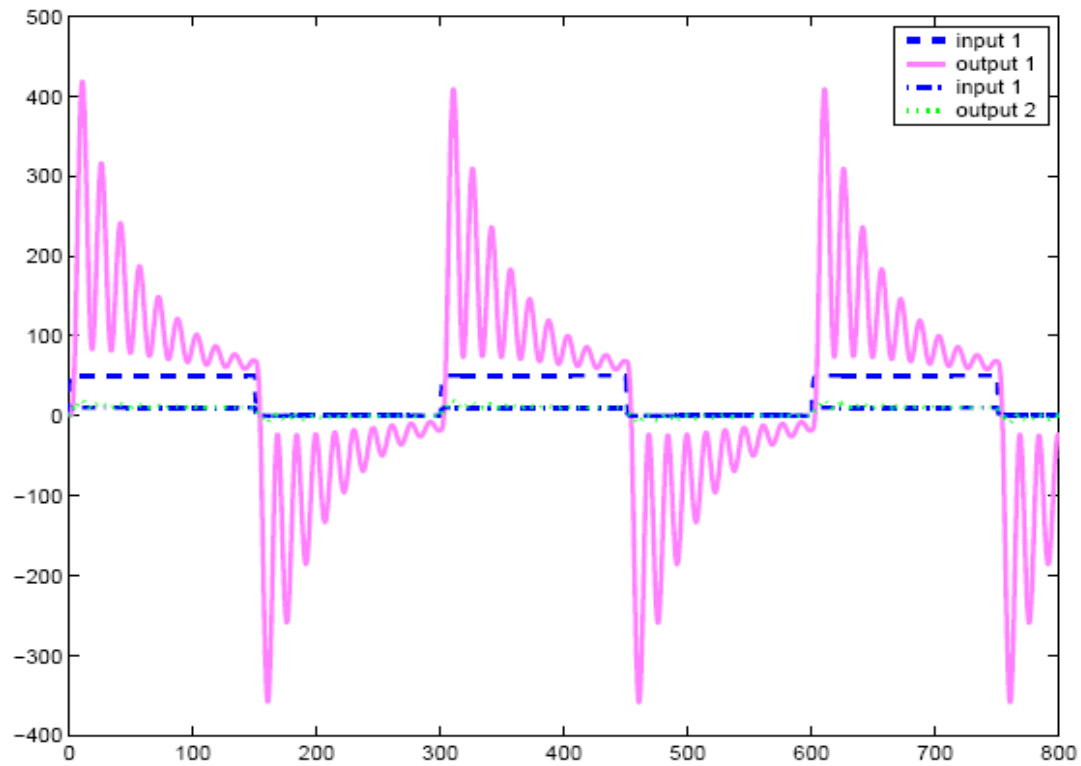


FIG.3. La commande prédictive à base d'état sans découplage

Exemple d'application (suite)

- GPC appliquée sur le système donné avec découplage

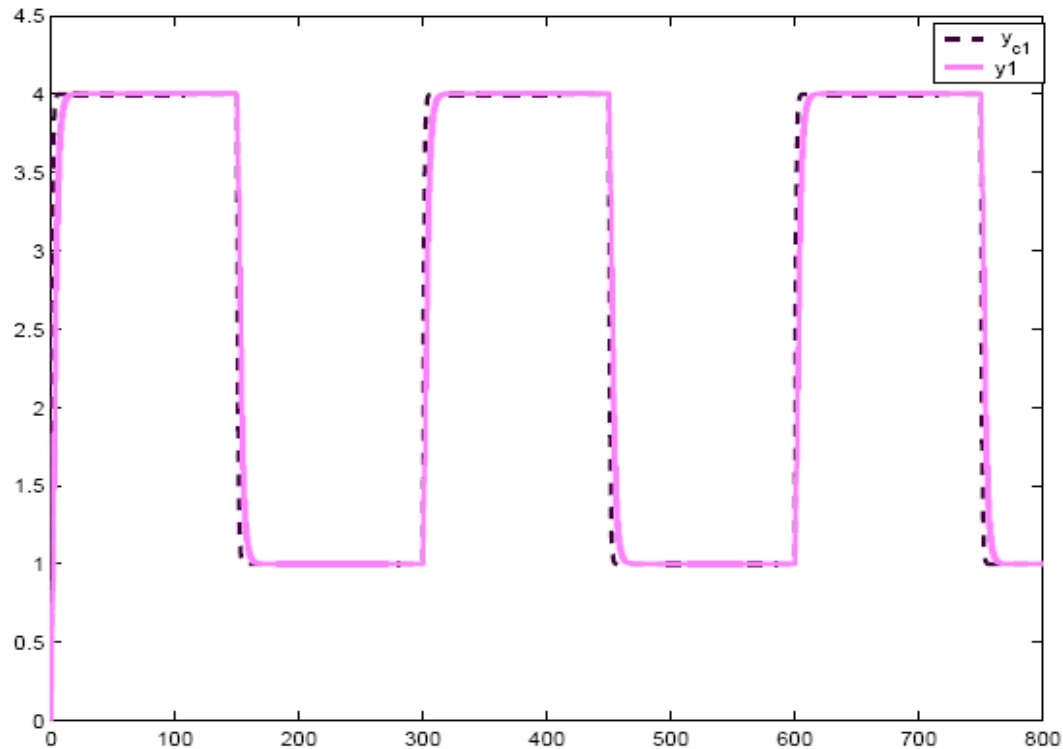


FIG.4. Sous-système 1

Exemple d'application (suite)

- GPC appliquée sur le système donné avec découplage

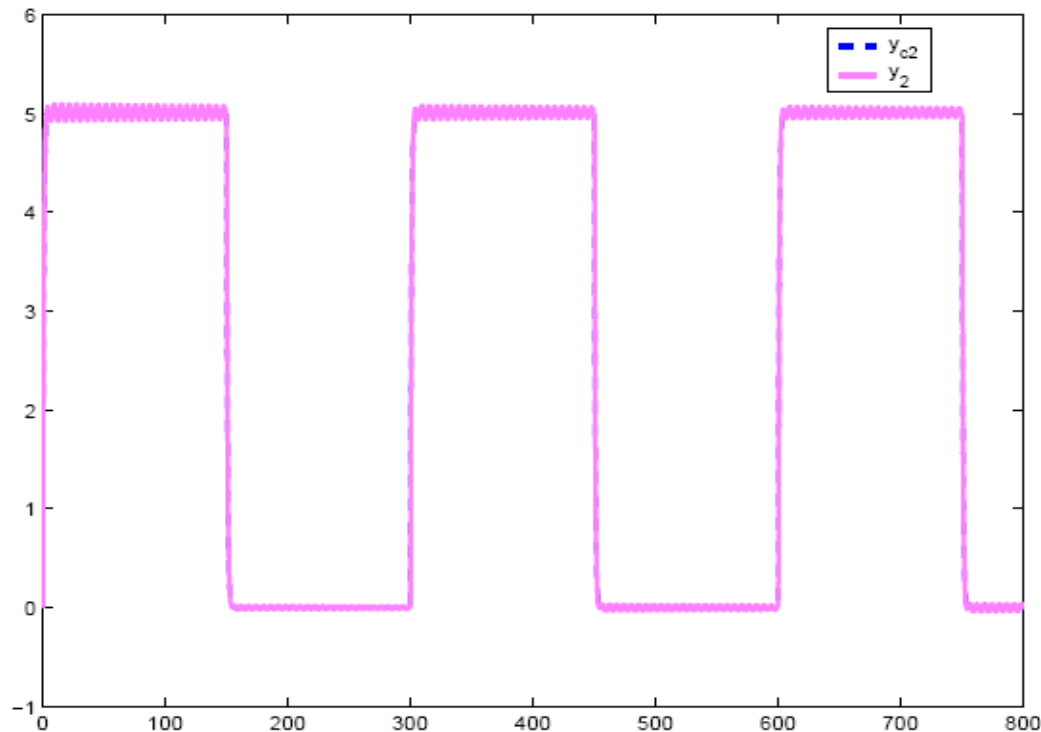


FIG.5. Sous-système 2

Plan

- Problématique
- La commande prédictive à base d'état
- Méthode proposée pour les systèmes MIMO
- Exemple d'application
- Conclusion**

Conclusion & Perspectives

Sous réserve que le système soit découplable, la méthode proposée permet de :

- Fixer indépendamment la dynamique des sous-système.
- Optimiser séparément le choix des horizons de prédiction et de commande de chacun de ses sous-systèmes.
- Compenser les zéros instables.

Application au control moteur Diesel (Projet PACTE financé par ITERREG III avec l'université de Sussex)