

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

 $Discipline: {\bf AUTOMATIQUE\text{-}PRODUCTIQUE}$

présentée et soutenue publiquement par

Nicolas MARCHAND

Ingénieur ENSIEG

le 21 janvier 2000

Titre:

COMMANDE À HORIZON FUYANT : THÉORIE ET MISE EN OEUVRE

Directeurs de thèse :

Alamir M. (LAG)

Hammouri H. (LAGEP-UCLB

Lyon1)

JURY:

Dugard L. Président

Lamnabhi-Lagarrigue F. Rapporteur

Sallet G. Rapporteur

Alamir M. Examinateur

Hammouri H. Examinateur



Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein des Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG) et d'Automatique et de Génie des Procédés de Lyon (LAGEP). Je remercie vivement leurs directeurs respectifs Monsieur Luc DUGARD et Monsieur Joseph LIETO de m'avoir permis d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions.

J'aimerais également remercier Monsieur Luc DUGARD pour avoir accepter de présider mon jury. Que Madame Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE et à Monsieur Gauthier SALLET trouvent ici mes plus humble remerciements pour le courage dont ils ont fait preuve dans la lecture de mon manuscrit.

Que Mazen ALAMIR trouve ici l'expression de mon plus grand respect. Son objectivité, son honnêteté et son don de soi sont rares. J'espère que mon entêtement de certains jours, mes absences d'autres jours n'auront pas entamer la foi qu'il met en ses thésards. Je remercie également Hassan HAMMOURI pour sa rigueur scientifique et pour l'aide qu'il m'a toujours apportée lorsque cela a été nécessaire, parfois aux dépends même de ses étudiants ou de sa famille.

Un grand merci aux formidables membres de l'équipe grenobloise SyCo dirigée par l'imprévisible et surprenant Guy Bornard. Merci tout particulièrement à Iyad pour son calme, à Mei Ling et Aaron, pour leur joie de vivre, à Alain pour ses fichiers monstrueux et à Gildas dit "le subtile" pour les quelques réflexions que nous avons eues ensemble. Merci également à notre italien préféré Paolino et son café, à Philippe et ses peine de coeur et à Olivier qui m'a toujours fait confiance pour les enseignements.

Un grand merci également aux Lyonnais que j'ai eu la chance de côtoyer. Je remercie tout particulier Jean-Claude Marquès et Jean Biston pour la nuit précédent ma soutenance et toute la caféine et les discussions que nous avons partagées.

Je n'oublierais pas toutes celles et ceux qui s'attachent à rendre la vie des thésards plus facile. Je pense notamment à Marie-Thérèse, Marie-Rose, Isabelle, Marielle, Florence, Nadia et l'incontournable Philippe.

Enfin, je voudrais remercier celle qui par sa patience, son innocence, ses doutes parfois et ses encouragements toujours m'a permis de devenir ce que je suis. Je veux parler de ma femme et je lui dédie mon travail.

Table des matières

T	able	des r	natières	9	
N	otati	ons		11	
In	itro	ductio	on générale	15	
Ι	Co	ntrib	ution à la stabilisation des systèmes non linéaires	19	
1	Élé	ments	théoriques préliminaires	21	
	1.1	Introd	$\operatorname{luction}$. 21	
	1.2	Stabil	ité et méthodes associées	. 21	
		1.2.1	Concepts de stabilité	. 21	
			1.2.1.1 Cas des systèmes à solution unique	. 21	
			1.2.1.2 Cas des systèmes à solutions multiples	. 22	
		1.2.2	Méthode directe de Lyapounov	. 23	
			1.2.2.1 Fonction de Lyapounov	. 23	
			1.2.2.2 Méthode directe de Lyapounov	. 24	
		1.2.3	$Th\'{e}or\`{e}me(s) \ inverse(s) \ \dots $. 24	
	1.3	Conce	pts de contrôlabilité et de stabilisabilité	. 24	
		1.3.1	Contrôlabilité	. 25	
		1.3.2	Contrôlabilité asymptotique	. 26	
		1.3.3	Stabilisabilité	. 27	
2	Lej	problè	me de stabilisation des systèmes non linéaires	29	
	2.1	Introd	$\operatorname{luction}$. 29	
	2.2	Le pro	bblème de stabilisation	. 30	
		2.2.1	Conditions nécessaires de Brockett	. 30	
		2.2.2	Stabilisation par retours d'état discontinus	. 31	
			2.2.2.1 Retours d'état temps variants	. 32	
			2.2.2.2 Retours d'état dynamiques	. 32	
	23	Comm	aanda par rotour d'état dynamique discontinu stabilisant	22	

		2.3.1	Position du problème	3
		2.3.2	Comportement générique	4
			2.3.2.1 Exemple	5
		2.3.3	Conditions suffisantes de stabilité au sens de Lyapounov 3	7
		2.3.4	Expression du retour d'état	1
			2.3.4.1 Hypothèses	1
			2.3.4.2 Formulation du retour d'état	2
			2.3.4.3 Preuve du théorème 2.3.5	3
		2.3.5	Exemples	8
			2.3.5.1 Pendule inversé	8
			2.3.5.2 Le satellite à deux moteurs	9
			2.3.5.3 Système non stabilisable par un retour d'état \mathcal{C}^1 5	2
	2.4	Conclu	sion	3
3	Con	ıtrôlab	ilité, stabilisabilité et stabilisation 5	5
	3.1	Introd	$uction \dots \dots$	5
	3.2	Sur la	relation entre contrôlabilité et stabilisabilité	6
		3.2.1	Relation contrôlabilité-stabilisabilité : le travail de Clarke et al. [1997] 5	6
			3.2.1.1 Π -trajectoire et s-stabilité	7
			3.2.1.2 Énoncé du résultat	8
			3.2.1.3 Grandes lignes de la preuve du théorème 3.2.1 5	8
		3.2.2	Contrôlabilité-stabilisabilité : un point de vue horizon fuyant 6	0
			3.2.2.1 Réflexions préliminaires 6	0
			3.2.2.2 Énoncé du résultat	3
			3.2.2.3 Relation avec le travail de Clarke et spécificité de l'approche 6	5
			$3.2.2.4$ Preuve du théorème $3.2.3:(\mathrm{CDSAG})$ entraı̂ne (CAG) 6	5
			$3.2.2.5$ Preuve du théorème $3.2.3:({\rm CAG})$ entraı̂ne (CDSAG) 6	5
		3.2.3	Conclusion et pistes de réflexion	4
	3.3	De la	commande en boucle ouverte à la stabilisation	4
		3.3.1	Introduction	4
		3.3.2	Conditions suffisantes de stabilisation	5
			3.3.2.1 De la boucle ouverte à la boucle fermée	5
			3.3.2.2 Preuve du théorème 3.3.1	6
			3.3.2.3 Remarques	8
		3.3.3	Application à un réacteur exothermique agité	8
			3.3.3.1 Dynamique du CSTR	8
			3.3.3.2 Comportement asymptotique	9
			3.3.3.3 Expression de la loi de commande	9
			3.3.3.4 Stabilité de la boucle fermée	2
			3.3.3.5 Simulation	3
		3.3.4	Stabilisation numérique	3

		3.3.5	3.3.4.1 Expression algorithmique de la commande	87 91 91 93
	3.4	Concl	usion	
II pl	$_{ m icit}^{ m C}$		oution à l'observation des systèmes non linéaire	s im- 101
1	Syn	thèse	d'observateur pour une classe de systèmes implicites	103
	1.1 1.2	Quelq 1.2.1 1.2.2	luction	104 104 104 105 107 108 113 113 icites 116 117
	1.4	Concl	usion	121
\mathbf{C}	oncl	usion	générale	125
\mathbf{A}	Pre	uve du	ı lemme 3.2.4	127
В	Prin	ncipale	es notations utilisées dans la preuve du lemme 3.2.5	133
В	iblio	grapl	nie	134

Notations 11

Notations

$\mathcal{B}(x,r)$	Boule de centre x et de rayon r .
$\mathcal{B}(r)$	Boule de centre 0 et de rayon r .
$\mathcal{D}(x,r,R)$	Disque de centre x , de rayon intérieur r et de rayon extérieur R : $\mathcal{D}(x,r,R):=\mathcal{B}(x,R)\backslash\mathcal{B}(x,r)$
$\mathcal{D}(r,R)$	Disque de centre 0, de rayon intérieur r et de rayon extérieur R : $\mathcal{D}(r,R):=\mathcal{B}(R)\backslash\mathcal{B}(r)$
$x(.;x_0,u)$	Solution, considérée en tant que fonction du temps, du système différentiel commandé avec x_0 comme condition initiale à $t=0$ et la fonction u comme commande. u peut être une fonction du temps ou un retour d'état.
$x(t;x_0,u)$	Valeur à l'instant t de $x(.; x_0, u)$.
$x(.;x_0,t_0,u)$.	Solution, considérée en tant que fonction du temps, du système différentiel commandé avec x_0 comme condition initiale à $t=t_0$ et la fonction u comme commande. u peut être une fonction du temps ou un retour d'état.
$x(t;x_0,t_0,u)$	Valeur à l'instant t de $x(.; x_0, t_0, u)$.
$x(.;x_0)$	Solution, considérée en tant que fonction du temps, du système différentiel autonome avec x_0 comme condition initiale à $t=0$.
$x(t;x_0)$	Valeur à l'instant t de $x(.;x_0)$.
$y(.;x_0,u)$	Sortie, considérée comme fonction du temps, du système différentiel commandé avec x_0 comme condition initiale à $t=0$ et la fonction u comme commande.
$y(t;x_0,u)$	Valeur à l'instant t de $y(.; x_0, u)$.
K	Classe des fonctions continues et strictement croissantes $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que $f(0) = 0$ [Hahn, 1967].
\mathcal{K}_{∞}	Classe des fonctions continues et strictement croissantes $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que $f(0) = 0$ et $\lim_{r \to \infty} f(r) = \infty$ [Hahn, 1967].
$\mathcal{L}_{\infty}^{E}(S)$	Ensemble des fonctions essentiellement bornées sur $S \subset \mathbb{R}^+$ dans un espace métrique E .
\mathcal{L}_{∞}^{E}	Ensemble des fonctions essentiellement bornées sur tout intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R}^+ à valeurs un espace métrique E .
\mathcal{C}^n	Ensemble des fonctions n fois continûment différentiables.
z_i	$i^{\text{\tiny eme}}$ composante du vecteur $z.$

Introduction générale

Introduction générale

La conception de retours d'état stabilisant les systèmes non linéaires, et par conséquent l'étude de leur stabilisabilité est un des principaux axes de recherche en automatique non linéaire. Parmi les différentes méthodes permettant sous certaines conditions d'aboutir à la stabilisation d'un système non linéaire, on peut citer les méthodes géométriques, les techniques basées sur les fonctions de Lyapounov ou encore l'horizon fuyant. C'est dans ce dernier axe que se situe la première et principale partie de ce mémoire. L'horizon fuyant est une technique consistant à générer une commande en boucle ouverte et à l'appliquer au système pendant un instant dt pour ensuite recommencer ainsi de suite. Si dt est infinitésimal, on se trouve dans le schéma temps continu classique et cette méthode aboutit à un retour d'état classique u(x); sinon, on se trouve dans le schéma continu discret. La stabilité de ce principe peut être garantie par un choix de la commande en boucle ouverte. Par exemple, dans le cas de la commande optimale, la commande en boucle ouverte choisie est celle qui minimise une fonction coût définie, soit sur un horizon infini, soit sur un horizon fini avec, dans ce cas, une contrainte finale sur l'état pour pouvoir garantir la stabilité système bouclé.

C'est ce principe d'horizon fuyant que nous nous sommes attachés à utiliser afin d'analyser les apports d'une telle approche en non linéaire.

Dans le premier chapitre, nous rappellerons les différents concepts classiquement utilisés dans les problèmes de stabilisation des systèmes non linéaires. En particulier, pour les systèmes autonomes, nous exposons la notion de stabilité au sens de Lyapounov ainsi que toutes les méthodes attenantes. Nous présentons également, pour les systèmes commandés, les notions touchant à la commandabilité et la stabilisabilité. Ces différentes définitions sont ensuite largement utilisées dans la suite de ce mémoire.

Le second chapitre est consacré au problème de stabilisation des systèmes non linéaires fait appel à techniques classiques en commande optimale à savoir les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Ce travail est issu d'une réflexion portant sur la relaxation de la contrainte finale d'égalité habituellement nécessaire dans les schémas horizon fuyant afin de garantir la stabilité du système bouclé. Le remplacement de cette contrainte d'égalité par une contrainte d'inégalité moins restrictive aboutit naturellement à un retour d'état dynamique discontinu. Ce retour d'état s'apparente à une généralisation des modes glis-

sants à savoir qu'il est défini comme un retour d'état statique sur une partie de l'espace d'état et par un retour d'état dynamique sur l'autre partie de cet espace. Il rentre dans le cadre des méthodes permettant de stabiliser les systèmes ne vérifiant pas les conditions dites de Brockett pour lesquels les retours d'états statiques réguliers ne suffisent pas.

Ces conditions, appelées conditions de Brockett, sont tout d'abord exposées et illustrées par des exemples. Nous passons ensuite en revue les différentes méthodes, proposées dans la littérature, pour stabiliser ces systèmes délicats. Enfin, nous présentons notre contribution à cet axe de recherche. En se basant sur une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman avec une contrainte finale d'inégalité, nous construisons un retour d'état dynamique et discontinu qui stabilise asymptotiquement les systèmes non linéaires affines en la commande. Des simulations, réalisées sur des exemples non linéaires, dont un ne vérifiant pas les conditions de Brockett, illustrent l'efficacité de l'approche proposée.

Le troisième chapitre porte sur la relation commandabilité/stabilisabilité et donc sur le lien entre trajectoires en boucle ouverte/boucle fermée. Ce sujet de réflexion est naturel avec l'horizon fuyant dans la mesure où cette méthode fait intervenir la boucle ouverte directement dans la conception du retour d'état. Le premier paragraphe traite d'une question de théorie des systèmes résolue en linéaire mais encore ouverte et d'actualité en non linéaire, à savoir l'existence d'une éventuelle équivalence entre stabilisabilité et contrôlabilité asymptotique. Après présentation des travaux de Clarke et al. [1997] basés sur une approche de type Lyapounov et parus simultanément à notre recherche, nous montrons, par un schéma de type horizon fuyant, qu'il est possible à partir d'une simple hypothèse de contrôlabilité asymptotique de construire un retour d'état continu-discret qui stabilise asymptotiquement le système non linéaire. Le résultat obtenu généralise celui obtenu par Clarke et al. [1997].

Ensuite, poursuivant cette étude sur la relation entre la boucle ouverte et la boucle fermée, nous mettons en évidence des conditions suffisantes sur les trajectoires en boucle ouverte permettant au résultat précédent de rester valide en temps continu. On peut ainsi aboutir très simplement, mais sous certaines conditions structurelles fortes, à un retour d'état stabilisant. En se basant sur ces conditions, nous construisons un retour d'état stabilisant pour un réacteur exothermique continûment agité. Nous terminons ce chapitre par une version numérique de la méthode précédente. Nous nous limitons à une classe de systèmes non linéaires présentant une certaine structure triangulaire, pour lesquels l'implémentation de la méthode est numériquement peu coûteuse en comparaison des autres méthodes basées sur l'horizon fuyant. Cette classe contient entre autres les systèmes différentiellement plats et les systèmes chaînés. De nombreux exemples sont présentés et notamment le contrôle de l'attitude d'un satellite à deux moteurs, problème réputé pour être délicat.

La seconde partie de notre travail porte sur le problème de l'observation des systèmes non linéaires. Ce problème est bien souvent un préliminaire à la stabilisation par retour d'état car ce dernier n'est pas toujours disponible; il est donc nécessaire de le reconstruire. Notre contribution a consisté à étudier le cas des systèmes dont une partie de l'état est donné en fonction de l'autre partie sous forme d'une relation implicite. Ce problème est en fait un problème d'observation d'un système non linéaire sur une variété. Hormis les observateurs optimaux, il n'existe pas réellement de solution pour ce genre de systèmes. En effet, comme nous allons le voir avec l'observateur à grand gain, les observateurs classiques, conçus pour observer des systèmes évoluant sur une variété, sont en pratique sensibles aux erreurs d'initialisation et de modèle. Nous avons, afin de remédier à cet inconvénient, généralisé l'observateur à grand gain de telle sorte à rendre la variété localement exponentiellement attractive pour l'estimée de l'état.

Les chapitres I.2, I.3, et II.1 constituant les contributions apportées à l'automatique non linéaire ont été rédigées de telle sorte qu'ils puissent être lus de manière indépendante. Il y est seulement fait référence à des définitions classiques rappelées dans le chapitre I.1.

Première partie

Contribution à la stabilisation des systèmes non linéaires

Chapitre 1

Éléments théoriques préliminaires

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de définir clairement les notions de stabilité, contrôlabilité et de stabilisabilité utilisées par la suite. Nous verrons tout d'abord les concepts fondamentaux de stabilité des systèmes différentiels autonomes et les outils qui s'y rattachent (fonctions de Lyapounov). Nous exposerons ensuite les notions de contrôlabilité et de stabilisabilité.

1.2 Stabilité et méthodes associées

1.2.1 Concepts de stabilité

On considère les systèmes non-linéaires décrits par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x)$$
 avec $f(x_0) = 0$ (1.2.1)

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et x_0 un point d'équilibre. Nous supposerons, dans un premier temps, que l'équation (1.2.1) admet une solution unique pour toute condition initiale donnée. En effet, bien plus qu'une éventuelle discontinuité (qui poserait éventuellement un problème d'existence d'une solution et de sa définition), c'est la multiplicité des solutions qui impose quelques notions supplémentaires que nous verrons par la suite.

Pour tout $\varepsilon \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{B}(x,\varepsilon)$ la boule de centre x et de rayon ε .

1.2.1.1 Cas des systèmes à solution unique

Définition 1.2.1 (attractivité). Le point d'équilibre x_0 est dit localement attractif (resp. globalement attractif) s'il existe r > 0 tel que pour toute condition initiale dans

 $\mathcal{B}(x_0,r)$ (resp. pour toute condition initiale dans \mathbb{R}^n), la trajectoire du système (1.2.1) tend vers x_0 quand le temps tend vers l'infini.

Définition 1.2.2 (stabilité). Le point d'équilibre x_0 est dit **stable au sens de Lya**pounov si pour tout R > 0, il existe r > 0 tel que pour toute condition initiale dans $\mathcal{B}(x_0, r)$, la trajectoire du système (1.2.1) reste dans $\mathcal{B}(x_0, R)$, pour tout $t \geq 0$.

Les travaux de Hahn [1967] ont montré que ces deux notions étaient indépendantes.

Définition 1.2.3 (stabilité asymptotique). Le point d'équilibre x_0 est localement asymptotiquement stable (resp. globalement asymptotiquement stable) si

- $-x_0$ est localement attractif (resp. globalement attractif)
- x_0 est un point d'équilibre stable au sens de Lyapounov

Le cas des systèmes temps-variants impose l'introduction de la notion de stabilité uniforme (par rapport au temps) que nous ne développerons pas ici.

On introduit également la notion de stabilité asymptotique forte :

Définition 1.2.4 (stabilité asymptotique forte). Le point d'équilibre x_0 est localement (resp. globalement) fortement asymptotiquement stable si pour tout $R \ge r > 0$, il existe des fonctions M(R), T(R,r) telles que

```
- (stabilit\acute{e}) \lim_{R \to 0} M(R) = 0
```

- pour toute condition initiale $x_0 \in \mathcal{B}(R)$, on a
 - (trajectoire bornée) $\forall t \geq 0, \ x(t; x_0) \in \mathcal{B}(M(R))$
 - $(attractivit\acute{e}) \ \forall t \geq T(R,r), \ x(t;x_0) \in \mathcal{B}(r)$

Cette notion est parfois également appelée stabilité équi-asymptotique. Cette définition a l'avantage de garantir, pour toute condition initiale dans un boule, une borne aux excursions de la trajectoire ne dépendant que du diamètre de cette boule. Elle impose à la convergence de la trajectoire d'être uniforme par rapport à la condition initiale.

1.2.1.2 Cas des systèmes à solutions multiples

Dans le cas où (1.2.1) admet plusieurs solutions, le système est dit **attractif** (similairement **stable** ou **asymptotiquement stable**) si chacune des solutions du système vérifie la définition précédente correspondante. Cependant, l'uniformité de la stabilité par rapport aux solutions est souvent recherchée et les notions suivantes de **stabilité uniforme** et de **stabilité asymptotique uniforme** ont été introduites.

Définition 1.2.5 (stabilité uniforme). Le point d'équilibre x_0 est dit **uniformément** stable si pour tout R > 0, il existe r > 0 tel que pour toute condition initiale dans $\mathcal{B}(x_0, r)$, toutes les trajectoires du système (1.2.1) qui partent de x_0 restent pour tout $t \geq 0$ dans $\mathcal{B}(x_0, R)$.

Définition 1.2.6 (stabilité asymptotique uniforme). Le point d'équilibre x_0 est dit uniformément asymptotiquement stable si il est attractif et uniformément stable.

1.2.2 Méthode directe de Lyapounov

Nous développons ici la méthode directe de Lyapounov basée sur les fonctions de Lyapounov. Nous supposerons désormais que $x_0 = 0$.

1.2.2.1 Fonction de Lyapounov

Définition 1.2.7 (fonction de Lyapounov locale). Une fonction de Lyapounov locale pour le système (1.2.1) est une fonction continue $V: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ (où \mathcal{X} est un ouvert de \mathbb{R}^n) pour laquelle il existe un voisinage $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ de l'origine tel que :

1. V est **propre** en θ :

 $\mathcal{V}_{\varepsilon} := \{x \in \mathcal{X}, \ V(x) \leq \varepsilon\}$ est un compact de \mathcal{O} pour ε suffisamment petit.

2. V est définie positive sur \mathcal{O} :

$$V(0) = 0$$
 et $V(x) > 0$ pour $x \in \mathcal{O}$, $x \neq 0$

3. V décroît le long de la trajectoire :

pour tout $x \neq 0$ dans \mathcal{O} , il existe t_{max} tel que, si x(t;x) dénote la trajectoire du système (1.2.1) à l'instant t ayant x pour condition initiale à l'instant 0, $V(x(t;x)) \leq V(x)$ pour tout $t \in [0, t_{max}]$ et $V(x(t_{max};x)) < V(x)$.

Remarque 1.2.1. Dans le cas où $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, la propriété "V est propre" peut être remplacée par la propriété équivalente " $\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = \infty$ ". On dit alors que V est radialement non bornée.

L'expression en terme de décroissance de la fonction de Lyapounov est certes très générale, mais fréquemment inutilisable, car il est le plus souvent impossible de prouver cette décroissance sans avoir recours à la dérivée de V. On utilise donc généralement la définition suivante légèrement différente des fonctions de Lyapounov :

Remarque 1.2.2. Lorsque V est continûment différentiable, on utilise en lieu et place du troisième point de la définition 1.2.7:

3. bis. pour tout $x \neq 0$ dans \mathcal{O} , on a: $L_f V(x) < 0$ (où $L_f V(x)$ est la dérivée de Lie de V dans la direction du champ f, c.a.d. $L_f V(x) := \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$).

Pour les systèmes dont le champ f est au moins continu, ces deux définitions sont, dans la pratique, équivalentes. En effet, les travaux de Massera [1949, 1956] et de Kurzweil [1963] sur les théorèmes inverses de Lyapounov (présentés par la suite) permettent de montrer dans ce cas que, si le système admet une fonction de Lyapounov au sens de la définition 1.2.7, alors il admet une fonction de Lyapounov continûment différentiable vérifiant $3.\ bis.$

Par contre, dans le cas des champs discontinus, il peut exister des systèmes admettant une fonction de Lyapounov au sens de la définition 1.2.7 mais n'admettant pas de fonction de Lyapounov différentiable.

Définition 1.2.8 (fonction de Lyapounov globale). Une fonction de Lyapounov est globale si V est globalement propre (c.a.d. V_{ε} est un compact pour tout ε) et les deux dernières propriétés de la définition 1.2.7 sont vérifiées avec $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$.

1.2.2.2 Méthode directe de Lyapounov

Le théorème qui suit est fondamental dans l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires. Il reste vrai, que le champ soit continu ou non, car sa preuve est basée sur l'inclusion successive des sphères de Lyapounov (c.a.d. $\mathcal{V}_{\varepsilon_1} \subset \mathcal{V}_{\varepsilon_2}$ si $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$).

Théorème 1.2.1 (méthode directe de Lyapounov). Si le système (1.2.1) admet une fonction de Lyapounov locale (resp. globale), alors il est asymptotiquement localement (resp. globalement) stable.

Si, dans le troisième point de la définition 1.2.7, l'inégalité vérifiée par la fonction de Lyapounov locale (resp. globale) est simple, alors le système est seulement localement (resp. globalement) stable.

1.2.3 Théorème(s) inverse(s)

La question est la suivante : un système localement asymptotiquement stable admet-il une fonction de Lyapounov locale? Le premier résultat sur ce problème est dû à Massera [1956] et concerne les systèmes dont le champ est au moins \mathcal{C}^1 . Le résultat a ensuite été généralisé par Kurzweil [1963] au cas \mathcal{C}^0 .

Théorème 1.2.2. Tout système de classe au moins C^0 localement (resp. globalement) asymptotiquement stable admet une fonction de Lyapounov locale dans le sens de la définition 1.2.7.

On notera que l'unicité de la solution du système différentiel n'est pas requise.

La généralisation du théorème précédent aux systèmes, dont le champ est discontinu, est un sujet important. Tout dépend en fait de la nature de f. Si f est discontinu mais que l'existence et l'unicité de la solution sont garanties, alors tout point d'équilibre stable admet une fonction de Lyapounov qui est en général discontinue [Zubov, 1957; Roxin, 1965; Bacciotti et Rosier, 1998]. Bacciotti et Rosier [1998] ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système discontinu du même type que précédemment ait une fonction de Lyapounov continue. Les conditions nécessaires et suffisantes obtenues s'apparentent à la stabilité forte 1.2.4.

1.3 Concepts de contrôlabilité et de stabilisabilité

On s'intéresse maintenant à un système de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.3.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^p$ la commande. On suppose que x_0 est un **point** d'équilibre du système, c'est à dire que $f(x_0,0) = 0$. On suppose pour le moment que tout problème à valeurs initiales, basé sur l'équation (1.3.1) admet une solution unique.

Le concept de contrôlabilité concerne le système (1.3.1) en boucle ouverte. On considère donc des commandes sous forme de fonctions du temps u(t). Celui de stabilisabilité par contre concerne l'existence de commandes en boucle fermée c'est à dire dépendantes de l'état du système et éventuellement du temps, ou/et d'états additionnels.

1.3.1 Contrôlabilité

La définition de la contrôlabilité que l'on trouve habituellement [Hermann et Krener, 1977; Sontag, 1998] est basée sur la notion d'atteignabilité (parfois mentionnée comme contrôlabilité faible)

Définition 1.3.1 (atteignabilité). Pour tout sous ensemble U de \mathbb{R}^n et x_i de U, on définit $A_U(x_i)$ l'ensemble des points U-accessibles en temps t_f depuis x_i , c'est à dire, l'ensemble des points x de \mathbb{R}^n pour lesquels il existe une commande bornée et mesurable u_x définie sur un intervalle de temps $[0, t_f]$ telle que la solution (considérée comme une fonction du temps) $t \to x(t; x_i, u_x)$ du problème

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u_x(t)) \\ x(0; x_i, u_x) = 0 \end{cases}$$

vérifie :

$$\begin{cases} x(t_f; x_i, u_x) = x \\ \forall t \in [0, t_f], \quad x(t; x_i, u_x) \in U \end{cases}$$

Si $U = \mathbb{R}^n$, on parle simplement d'atteignabilité et on note $A(x_i)$.

On définit alors

Définition 1.3.2 (contrôlabilité en un point). Le système (1.3.1) est dit contrôlable en x_i si $A(x_i) = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.3 (contrôlabilité). Le système est dit **contrôlable** si pour tout $x_i \in \mathbb{R}^n$, on $a A(x_i) = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.4 (contrôlabilité locale en un point). Le système (1.3.1) est dit localement contrôlable en x_i si pour tout voisinage V de x_i , $A_V(x_i)$ est également un voisinage de x_i

Définition 1.3.5 (contrôlabilité locale). Le système (1.3.1) est dit localement contrôlable si il est localement contrôlable en tout point de \mathbb{R}^n .

Ces définitions ont l'avantage de pouvoir se traduire dans le cas où le champ est analytique par une condition géométrique dite **condition de rang**, analogue à celle que l'on peut obtenir dans le cas des systèmes linéaires. Ces questions sont abondamment développées dans les ouvrages traitant des aspects géométriques de la commande [Isidori, 1995; Nijmeijer et Van der Schaft, 1990].

Par abus de langage, certains auteurs parlent de contrôlabilité quand il s'agit de la contrôlabilité de l'origine. Un terme plus précis, la **nulle-contrôlabilité**, a été introduit pour éviter la confusion.

On remarquera que dans le cas où, la solution du système différentiel n'est pas unique, la notion de contrôlabilité n'a pas de sens. En effet, si on définit $A_U(x_0)$ comme étant l'ensemble des points initiaux pour lesquels il existe une commande permettant à une solution au moins d'atteindre x_0 au bout d'un temps t_f , peut-on parler de contrôlabilité dans la mesure où les autres trajectoires du système évoluent sans contrôle? Par contre si $A_U(x_0)$ désigne l'ensemble des points initiaux pour lesquels il existe une commande permettant à toutes les solutions d'atteindre x_0 au bout d'un temps t_f , cet ensemble risque d'être vide pour la plupart des systèmes considérés.

1.3.2 Contrôlabilité asymptotique

Complétant les définitions précédentes, la notion de **contrôlabilité asymptotique** a été introduite pour caractériser l'idée que l'état du système peut être amené de manière asymptotique vers un état désiré. Cette notion est moins forte que la contrôlabilité présentée précédemment. Ainsi, on définit :

Définition 1.3.6. Soit x_i et x_f deux points de \mathbb{R}^n et \mathcal{S} un sous-ensemble de \mathbb{R}^n contenant x_i et x_f . On dit que l'état du système (1.3.1) peut être **amené asymptotiquement du point** x_i **au point** x_f **sans quitter** \mathcal{S} si il existe une fonction mesurable u, définie sur $[0, +\infty[$, telle que :

$$\begin{cases} \lim_{t \to \infty} x(t; x_i, u) = x_f \\ \forall t \ge 0, \quad x(t; x_0, u) \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Soit x_0 un point d'équilibre du système, on définit les différentes notions de contrôlabilité asymptotique par :

Définition 1.3.7 (contrôlabilité asymptotique locale). Un système est dit localement asymptotiquement contrôlable en x_0 si, pour tout voisinage V de x_0 , il existe un voisinage W de x_0 tel que tout $x \in W$ peut être asymptotiquement amené en x_0 sans quitter V.

Définition 1.3.8 (contrôlabilité asymptotique globale). Un système est dit globalement asymptotiquement contrôlable en x_0 s'il est localement asymptotiquement contrôlable en x_0 et si tout x peut être asymptotiquement amené en x_0 .

Définition 1.3.9 (nulle asymptotique contrôlabilité). Lorsque $x_0 = 0$, on parle de nulle asymptotique contrôlabilité.

On notera la similarité des définitions 1.3.7 et 1.2.3.

Stabilisabilité 1.3.3

Cette notion fait le lien entre la première partie de ce chapitre concernant la stabilité et celle qui vient d'être développée sur la contrôlabilité. Elle consiste en fait à trouver un retour d'état qui stabilise le système. En termes plus précis :

Définition 1.3.10 (retour d'état). Un retour d'état est :

- soit une fonction mesurable de l'état, on parle alors de **retour d'état statique**,
- soit une fonction mesurable du temps et de l'état, on parle alors de retour d'état statique temps variant,
- soit un système dynamique :

$$\dot{z} = h(x, z)$$

et une fonction mesurable u de l'état x et de l'état ajouté z. u est alors un **retour** d'état dynamique,

- soit un système dynamique :

$$\dot{z} = h(x, z, t)$$

et une fonction mesurable u de l'état x, de l'état ajouté z et du temps t. u est alors un retour d'état dynamique temps variant. Soit h, soit u peut ne pas dépendre $du \ temps.$

On définit alors :

Définition 1.3.11 (stabilisabilité). On dit que le système (1.3.1) est localement $(resp. \ globalement) \ stabilisable \ en \ x_0 \ par \ un \ retour \ d'état \ statique \ si \ il \ existe \ un$ retour d'état u tel que x_0 soit un point localement (resp. globalement) asymptotiquement stable pour le système autonome :

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{1.3.2}$$

En général, le point d'équilibre n'est pas précisé et il s'agit de l'origine; en effet, on peut toujours se ramener à ce problème par une simple transformation. On parle alors de stabilisabilité sans autre précision.

Dans le cas où le système admet plusieurs solutions, on parle de stabilisabilité quand le système bouclé (1.3.2) est uniformément asymptotiquement stable. On impose donc à toutes les solutions de tendre "de la même manière" vers le point d'équilibre.

Pour les autres formes de retour d'état, la définition 1.3.11 s'étend simplement en considérant les systèmes autonomes :

- $\{\dot{x} = f(x, u(x, t)) \text{ pour les retours d'état temps variants.}$
- $-\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(x, z)) \\ \dot{z} = u(x, z) \end{cases}$ pour les retours d'état dynamiques. $-\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(x, z, t)) \\ \dot{z} = u(x, z, t) \end{cases}$ pour les retours d'état dynamiques temps variants.

Chapitre 2

Le problème de stabilisation des systèmes non linéaires

2.1 Introduction

La conception de lois de commandes stabilisantes est un des défis majeurs de l'automatique. Dans le cas linéaire, il est assez facile, à partir d'une simple hypothèse de contrôlabilité asymptotique, de concevoir un retour d'état stabilisant dans la mesure où, dans ce cas, il y a équivalence entre contrôlabilité et stabilisation asymptotique. En non linéaire, le problème est beaucoup plus délicat car cette équivalence n'existe pas.

Dans ce chapitre, nous présentons notre contribution à la conception de retour d'état stabilisant. Le schéma proposé est issu d'une relaxation de la contrainte finale habituellement imposée en commande optimale. Ceci aboutit naturellement à un retour d'état discontinu dynamique rentrant dans la classe des stratégie permettant la stabilisation des systèmes pour lesquels un retour d'état régulier ne suffit pas. Ce travail s'inscrit donc dans la recherche de retours d'état non réguliers, motivée principalement par les travaux sur les conditions de Brockett Brockett et al. [1983].

Dans un premier temps, nous exposerons donc par des exemples révélateurs les obstacles structurels qu'il peut y avoir à la conception de retours d'état classiques plus ou moins réguliers. Ce point concerne principalement ce que l'on appelle les conditions de Brockett. Ensuite, nous présenterons les différentes techniques qui permettent de sortir du cadre habituel du retour d'état continu "classique" afin de stabiliser un certain nombre de systèmes "délicats" pour lesquels ces méthodes ne suffisent pas.

Nous présenterons ensuite notre contribution sur le sujet à savoir un retour d'état qui stabilise asymptotiquement les systèmes affines en la commande. La structure de ce retour d'état est quelque peu inhabituelle en automatique; elle consiste en un basculement entre un retour statique classique (mais éventuellement discontinu) et un retour d'état dynamique. Ce schéma peut être pris comme une généralisation de la commande à modes glissants. Nous commencerons donc par une explication détaillée du comportement du sys-

tème bouclé et du retour d'état. Ensuite, nous présenterons quelques conditions suffisantes de stabilisation qui s'expriment sous la forme d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman avec contrainte d'inégalité finale, que nous utiliserons dans la preuve de la stabilité de la boucle fermée. Nous finirons par quelques simulations sur des exemples dont notamment un ne vérifiant pas les conditions de Brockett.

Notons que les aspects portant sur la robustesse de la commande proposée ont été développés depuis par Balloul [2000].

2.2 Le problème de stabilisation

Rappelons que nous considérons le système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^p$ la commande. On suppose que 0 est un **point** d'équilibre du système, c'est à dire que f(0,0) = 0.

2.2.1 Conditions nécessaires de Brockett

Dans la recherche de conditions nécessaires de stabilisation, les conditions de Brockett représentent un résultat primordial. Un système ne vérifiant pas les conditions de Brockett est par nature délicat à stabiliser (voire impossible). L'objectif ici est de présenter les résultats disponibles dans la littérature sur ce sujet et de l'illustrer par des exemples.

Théorème 2.2.1 (Brockett et al. [1983]). Soit un système Σ de la forme (2.2.1) dont le champ f est au moins C^1 . Si Σ est localement asymptotiquement stabilisable par un retour d'état u de classe C^1 tel que u(0) = 0, alors :

- 1. le linéarisé du système à l'origine ne possède pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres positives ou nulles .
- 2. il existe un voisinage V de l'origine tel que l'état du système peut être amené asymptotiquement de tout point $x_i \in V$ à l'origine.
- 3. tout voisinage de l'origine a pour image par f un voisinage de l'origine .

Il est clair que la condition 2 est induite par une hypothèse de nulle contrôlabilité asymptotique sur le système. Les conditions 1 et 3 restent néanmoins nécessaires à la stabilisation par un retour d'état **de classe** \mathcal{C}^1 . Ainsi le système suivant proposé par Brockett n'est pas stabilisable par un retour d'état différentiable dans la mesure où $(0,0,\varepsilon) \notin \operatorname{im}(f)$ pour tout $\varepsilon \neq 0$.

Exemple 2.2.1. [Brockett et al., 1983]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 - x_1 u_2 \\ x_1, x_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Les recherches ont alors porté sur une éventuelle généralisation de ces conditions pour les retours d'état seulement continus voire discontinus.

Kawski montra, par un exemple, que la condition 1 n'est plus nécessaire dans le cas d'un retour d'état continu :

Exemple 2.2.2. [Kawski, 1990]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3 \\ x_1, x_2, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ce système ne vérifie pas la première condition de Brockett mais peut être stabilisé par le retour d'état continu $u(x) = -x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_2^{\frac{1}{3}} - x_1^3$.

Cependant, la condition 3 demeure même lorsque le retour d'état est seulement supposé localement lipschitz Sontag [1998].

Plus encore, si on s'intéresse à la classe des retours d'état ensemblistes semi-continus supérieurement à valeur non vide et convexe, pour lesquels les solutions de $\dot{x} \in f(x, u(x))$ peuvent être clairement définies par la théorie de Filippov [1988], la condition 3 reste nécessaire [Ryan, 1994]. Elle est souvent appelée **condition de Brockett**.

Cette condition provient de considérations sur le degré de Brouwer de f pour un système autonome asymptotiquement stable $\dot{x}=f(x)$. La preuve initiale donnée par Brockett est basée sur l'homotopie des surfaces de Lyapounov avec la sphère [Wilson, 1967] et le théorème de Poincaré-Hopf. Celle-ci présente l'inconvénient de ne pouvoir être généralisée au cas continu ni même d'être transposé au cas des systèmes discrets [Bensoubaya et al., 1995].

2.2.2 Stabilisation par retours d'état discontinus

Au vu des résultats sur les conditions de Brockett ci-dessus, on pourrait chercher l'intérêt qu'il y a à utiliser des retours d'état discontinus alors que, comme pour les retours d'état continus, la troisième condition reste nécessaire. Il faut cependant noter que ces conditions ne sont que nécessaires et non suffisantes. Ainsi, il existe des systèmes vérifiant la troisième condition de Brockett qui ne sont pas stabilisable par un retour d'état continu. Parmi ces systèmes, certains sont cependant stabilisable par un retour d'état discontinu. L'exemple suivant donné par Ryan fait partie de ceux-là :

Exemple 2.2.3. [Ryan, 1994]

$$\begin{cases} \dot{x} = x + |x| u \\ x, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ce système ne peut être stabilisé par un retour d'état statique continu alors que $u(x) = -2\operatorname{sign}(x)$ rend l'origine asymptotiquement stable.

Quelle que soit la méthode permettant d'aboutir à un retour d'état discontinu, il est, dans tous les exemples proposés dans la littérature, issu de propriétés particulières du système considéré comme par exemple :

- Forme particulière de l'équation différentielle. Un point suscitant un grand intérêt porte sur les systèmes chaînés ou plus généralement sur des classes de systèmes non holonômes [Laiou et Astolfi, 1999; Astolfi, 1996; Alamir et Khennouf, 1995].
- Possibilité d'exhiber une surface de glissement permettant un retour d'état de type modes glissants [Sira Ramirez, 1994, 1992] ou plus généralement, la possibilité de faire décroître une fonction de Lyapounov par une commande commutée.
- Notre travail reposera sur une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman à contrainte finale d'inégalité qui sera supposée avoir au moins une solution.

2.2.2.1 Retours d'état temps variants

L'utilisation des retours d'état temps variant apparaît au vu du résultat établi par Coron [1992] comme une solution plus puissante en théorie que le retour d'état discontinu. En effet, tout système $\dot{x} = f(x, u)$, stabilisable par un retour d'état discontinu (au sens de Filippov), est stabilisable par un retour d'état continu temps variant périodique.

Notamment, comme l'a montré Samson [1991], le système de l'exemple 2.2.1 proposé par Brockett est stabilisable par un retour d'état temps variant \mathcal{C}^{∞} périodique alors que, puisqu'il ne vérifie pas la condition de Brockett, il n'est pas stabilisable par un retour d'état ne dépendant pas du temps.

Les retours d'état temps variants ont fait l'objet d'une littérature abondante ces dernières années [Pettersen et Egeland, 1997; Lin, 1996; Coron et Keraï, 1996; Morin et al., 1995; Soerdalen et Egeland, 1995]. Cependant, il ne faut pas oublier de mentionner, d'une part que ces retours d'état sont délicats à construire car ils nécessitent une fonction de Lyapounov dépendante du temps et de l'état qui n'est pas toujours évidente à intuiter. D'autre part, la commande obtenue oscille à forte fréquence, la rendant parfois inapplicable en pratique.

2.2.2.2 Retours d'état dynamiques

Les retours d'état dynamiques sont couramment utilisés dans le cadre des retours de sortie, la dynamique permettant la reconstruction de l'état [Teel et Praly, 1994]. Dans le cadre des retours d'état, ils sont peu utilisés car il n'existe aucune méthode systématique

de synthèse. On notera les travaux de Tsinias [1989, 1992, 1993, 1995] sur l'ajout d'intégrateur aboutissant au résultat suivant : si $\dot{x} = f(x, u)$ est stabilisable par un retour d'état continu, alors $\dot{x} = f(x, z)$, $\dot{z} = v$ est également stabilisable (éventuellement par un retour d'état discontinu). Ce résultat a été établi pour $u \in \mathbb{R}$ si le retour d'état n'est supposé que continu et pour $u \in \mathbb{R}^p$ si le retour d'état est supposé au moins \mathcal{C}^1 . On pourrait se demander l'intérêt qu'il y a à ajouter un intégrateur pour le problème de la stabilisation, car intuitivement on aurait tendance à penser qu'il est plus compliqué de stabiliser le système augmenté que le système initial. Pourtant, l'exemple suivant contredit cette intuition :

Exemple 2.2.4. [Coron et Praly, 1991]

Soit $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{cases} f(x,u) = -\left[\left(\|x_1\|^2 + x_2^2\right)^3 - C^2\left(u^3 - \|x_1\|^2 u + x_2^3\right)^2\right] x \\ n \ge 2, \ x_1 \in \mathbb{R}^{n-1}, \ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour C suffisamment grand, le système $\dot{x} = f(x, u)$ n'est pas localement asymptotiquement stabilisable par un retour d'état continu alors que $\dot{x} = f(x, z)$, $\dot{z} = v$ l'est.

Le retour d'état dynamique peut donc être un outil pour la stabilisation des systèmes délicats.

2.3 Commande par retour d'état dynamique discontinu stabilisant

2.3.1 Position du problème

Nous considérons ici le cas des systèmes affines en la commandes suivants :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.3.1}$$

où x est l'état du système et $u \in \mathbb{R}^p$ la commande. f et g sont supposées uniquement continues. L'objectif est la stabilisation asymptotique du système (2.3.1) autour de l'origine. Ce problème est assez classique mais le schéma proposé ici est quelque peu inhabituel. En effet, nous cherchons un retour d'état qui est un mélange d'un retour d'état statique classique et d'un retour d'état dynamique, ne correspondant ainsi à aucun des retours d'état, listés dans la définition 1.3.10, que l'on rencontre habituellement. La condition de passage du schéma dynamique au schéma statique est assurée par une fonction C. Le retour d'état proposé a la forme suivante :

$$\dot{\zeta} = \varphi(x,\zeta)$$
 lorsque $C(x,\zeta) > 0$ (2.3.2a)

$$\zeta = a(x)$$
 lorsque $C(x,\zeta) \le 0$ (2.3.2b)

$$u = k(x, \zeta) \tag{2.3.2c}$$

Les deux équations (2.3.2a) et (2.3.2b) définissent la dynamique d'un état $\zeta \in \mathbb{R}^q$ interne au contrôleur. Le passage de l'un à l'autre entraîne éventuellement une discontinuité dans la commande.

Cette structure atypique justifie tout d'abord une explication approfondie de ce schéma de commande. Pour cela, nous avons choisi le système de l'exemple 2.2.3 auquel a été appliqué deux retours d'état, de la forme (2.3.2), afin de montrer le comportement du système sous un tel retour d'état.

Nous exposons ensuite quelques résultats de stabilité au sens de Lyapounov concernant les systèmes bouclés de la forme suivante considérée ici :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.3.3a}$$

$$\dot{\zeta} = \varphi(x,\zeta)$$
 lorsque $C(x,\zeta) > 0$ (2.3.3b)
 $\zeta = a(x)$ lorsque $C(x,\zeta) \leq 0$ (2.3.3c)

$$\zeta = a(x)$$
 lorsque $C(x,\zeta) \le 0$ (2.3.3c)

$$u = k(x,\zeta) \tag{2.3.3d}$$

Enfin, nous présenterons un retour d'état de la forme (2.3.2) et la preuve de la stabilité de la boucle fermée (2.3.3). Trois exemples, dont un ne vérifiant pas la première des conditions de Brockett, sont présentés en fin de chapitre.

2.3.2Comportement générique

Tant que la condition $C(x,\zeta) > 0$ est vérifiée, nous nous trouvons dans les termes du retour d'état dynamique de la définition 1.3.10 :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$\dot{\zeta} = \varphi(x,\zeta)$$

$$u = k(x,\zeta)$$

Si $C(x,\zeta) \leq 0$, le schéma est celui du retour d'état statique habituel :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$u = k(x, a(x))$$

Le passage du schéma (2.3.2a) à (2.3.2b) et vis-versa s'opère de la manière suivante :

- Si t^{\star}_{\downarrow} est un instant tel que $C(x(t),\zeta(t))>0$ pour $t< t^{\star}_{\downarrow}$ et $C(x(t),\zeta(t))\leq 0$ pour $t\geq t^{\star}_{\downarrow}$ (t dans un voisinage de t^{\star}_{\downarrow}), la valeur de $\zeta(t^{\star}_{\downarrow})$ est alors donnée par l'intégration de l'équation différentielle (2.3.2) pour $t < t_{\perp}^{\star}$ et est calculée à partir de la connaissance de x(t) pour $t \geq t_{\perp}^{\star}$ conformément à l'équation (2.3.2b). On a donc $\zeta(t_{\perp}^{\star}) = a(x(t_{\perp}^{\star}))$. On remarquera que cela peut impliquer un saut dans la commande, le retour d'état est donc discontinu.
- Si t^{\star} au contraire est un instant tel que $C(x(t),\zeta(t))$ ≤ 0 pour t ≤ t^{\star} et $C(x(t),\zeta(t))>0$ pour $t>t^{\star}$ (t dans un voisinage de t^{\star}), la valeur de $\zeta(t^{\star})$ est donnée par (2.3.2b) pour $t \le t^{\star}$ et est calculée en intégrant (2.3.2a) pour $t > t^{\star}$ en utilisant $\zeta(t_{\uparrow}^{\star}) = a(x(t_{\uparrow}^{\star}))$ comme initialisation. Ce passage là est continu.

La figure 2.1 montre un exemple générique de l'évolution d'un système avec un tel retour d'état. On peut remarquer que les instants t où $C(x(t), \zeta(t))$ s'annule en décroissant sont par nature des points de discontinuité de la fonction $t \to C(x(t), \zeta(t))$ et donc de la dérivée première de x(t).

Il est clair que la classe des retours d'état de la forme (2.3.2) contient les retours d'état statiques et dynamiques définis en 1.3.10.

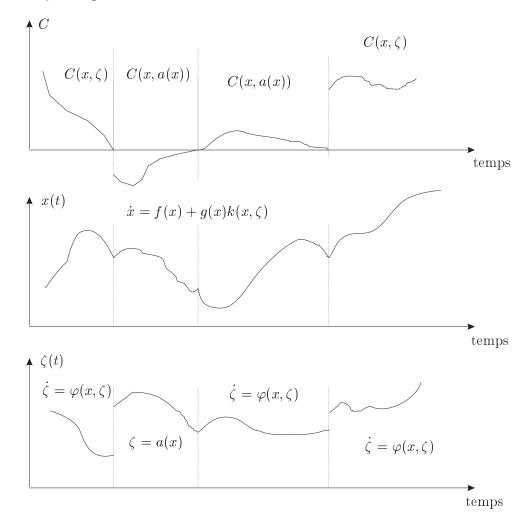


Figure 2.1 – Évolution d'un système générique bouclé avec un retour d'état de la forme (2.3.2)

2.3.2.1 Exemple

L'exemple qui suit illustre le comportement général du schéma de commande (2.3.2). Les deux retours d'état proposés sont empiriques. Bien entendu, le but de notre travail a consisté à trouver une approche **constructive et systématique** face à un problème de stabilisation des systèmes affines en la commande à l'aide de retours d'état de la forme (2.3.2). Des exemples plus révélateurs de cette approche seront développés par la suite.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = x + |x| u \qquad x \in \mathbb{R}, \ u \in \mathbb{R} \tag{2.3.4}$$

Ce système est connu pour ne pas être stabilisable par un retour d'état continu [Ryan, 1994. Nous allons analyser le comportement du système (2.3.4) bouclé avec les deux retours d'état (2.3.5) et (2.3.6) suivants :

1. Soit le retour d'état de la forme (2.3.2) suivant :

$$\dot{\zeta} = 0 \qquad \text{si } C(x,\zeta) := -x \left(x + |x| \zeta \right) > 0$$

$$\zeta = -2 \text{sign}(x) \quad \text{si } C(x,\zeta) := -x \left(x + |x| \zeta \right) \le 0$$

$$u = \zeta \qquad (2.3.5)$$

Quelles que soient les conditions initiales de x et ζ , l'état du système converge asymptotiquement vers l'origine avec au plus un instant pour lequel $C \leq 0$. En effet, C teste si la norme de l'état est strictement décroissante et dès que ça n'est plus le cas, assigne à ζ une valeur qui garantit au système en boucle fermée le même comportement que $\dot{x} = -x$. En fait, le retour d'état (2.3.5) est équivalent au retour d'état discontinu $u(x) = -2\operatorname{sign}(x)$.

2. Soit maintenant un second retour d'état de la forme (2.3.2) pour le système (2.3.4) qui souligne mieux la manière dont le système se comporte lorsque C change de signe:

$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\zeta_1}(x+|x|\zeta_2) \end{pmatrix} \quad \text{si } C(x,\zeta) > 0$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} \frac{|x|}{2} \\ -4\text{sign}(x) \end{pmatrix} \quad \text{si } C(x,\zeta) \le 0$$

$$(2.3.6a)$$

$$(2.3.6b)$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} \frac{|x|}{2} \\ -4sign(x) \end{pmatrix} \quad \text{si } C(x,\zeta) \le 0$$
 (2.3.6b)

$$u = \zeta_2 \tag{2.3.6c}$$

avec

$$C(x,\zeta) := (1 - \operatorname{sign} \left[(\zeta_1 \zeta_2 + 2x)^2 \right]) (x^2 - \zeta_1^2) \zeta_1^2$$
 (2.3.7)

Remarquons d'abord que si $\zeta_1 = 0$ alors $C(x, \zeta) = 0$ et c'est donc l'équation (2.3.6b) qui est utilisée. Il n'y a donc pas de problème de définition du retour d'état.

On peut vérifier que le choix de C et les équations (2.3.6a) et (2.3.6b) entraînent que pour tout t > 0, on a :

$$\zeta_1(t)\zeta_2(t) + 2x(t) = 0 (2.3.8)$$

En effet, si $\zeta_1\zeta_2 + 2x \neq 0$ alors $1 - \text{sign}\left[(\zeta_1\zeta_2 + 2x)^2\right] = 0$ et donc $C(x,\zeta) = 0$. Par l'équation (2.3.6b), ζ est alors ré-initialisé de telle sorte que la relation (2.3.8) soit vérifiée pour tout t > 0.

En conséquence, pour presque tout t, on a $u(t) = \zeta_2(t) = -\frac{2x(t)}{\zeta_1(t)}$. Le système (2.3.4) évoluera alors comme le système

$$\dot{x} = \begin{cases} x - \frac{2x^2}{\zeta_1} & \text{si } x \ge 0\\ x + \frac{2x^2}{\zeta_1} & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$
 (2.3.9)

avec ζ_1 constant tant que $C(x,\zeta) > 0$.

La norme de l'état du système (2.3.9) est strictement décroissante dès que $x > \frac{1}{2}\zeta_1 \geq 0$ ou $0 \geq -\frac{1}{2}\zeta_1 > x$ (remarquons que ζ_1 reste positif pour tout t > 0). Or c'est exactement ce que garantit (2.3.6b) en ré-initialisant ζ_1 à la valeur $\frac{1}{2}|x|$ dès que $|x| = \zeta_1$.

La figure 2.2 représente l'évolution du système (2.3.4) bouclé avec le retour d'état (2.3.6) et x(0) = 4 et $\zeta(0) = \left(\frac{1}{2}|x(0)|, -4\mathrm{sign}(x)\right)$ comme conditions initiales. Dans ce cas, on a $C(x(0), \zeta(0)) > 0$; donc |x(t)| décroît comme (2.3.9) avec $\zeta_1(t) = \zeta_1(0) = \frac{1}{2}|x(0)|$. Dès que $x(t) = \zeta_1(t) = \frac{1}{2}|x(0)|$, C s'annule et ζ_1 est ré-initialisé à $\frac{1}{2}x(t) = \frac{1}{4}x(0)$ et ainsi de suite donnant le comportement en escalier de ζ_1 de la figure 2.2.

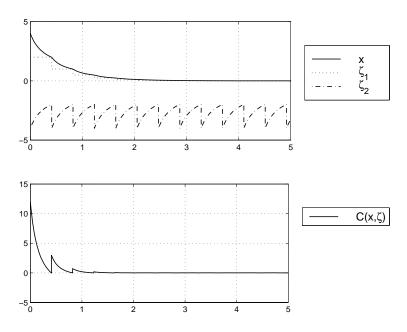


Figure 2.2 – Exemple montrant le sens de (2.3.2a) et (2.3.2b)

2.3.3 Conditions suffisantes de stabilité au sens de Lyapounov

L'objectif ici est de donner des conditions suffisantes de stabilité pour le système en boucle fermée. Ces résultats serviront dans le paragraphe 2.3.4.2 où est exposé le retour d'état proposé. L'objectif est d'obtenir des conditions de stabilité s'exprimant au moyen d'une fonction de Lyapounov se rapprochant des conditions nécessaires et suffisantes exposées au chapitre 1. Nous considérons le système général non linéaire autonome :

$$\dot{z}_1 = \bar{f}(z_1, z_2) \tag{2.3.10a}$$

$$\dot{z}_2 = \varphi(z_1, z_2) \text{ si } C(z_1, z_2) > 0$$
 (2.3.10b)

$$z_2 = a(z_1)$$
 si $C(z_1, z_2) \le 0$ (2.3.10c)

où $z=(z_1,z_2)^T\in\mathbb{R}^{q_1}\times\mathbb{R}^{q_2}$ est l'état du système. φ,C et \bar{f} sont supposées continues par rapport à ses arguments.

On remarquera que le système (2.3.3) entre dans la classe des systèmes de la forme (2.3.10), dès lors que k et C sont continues. Nous supposerons que pour toute condition initiale, il existe une solution au problème aux valeurs initiales. En effet, l'existence d'une solution dépend dans notre cas du choix du retour d'état, ce point sera donc abordé par la suite.

Nous supposerons que les équations (2.3.10a)-(2.3.10c) du système sont définies sur un ensemble $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}$ invariant par le système. Autrement dit, si, à une condition initiale dans Ω , il correspond une trajectoire, celle-ci est dans Ω . On remarquera que l'on ne suppose pas Ω borné. De même, comme la fonction a(.) peut être discontinue dans le schéma présenté ici, rien ne nous garantit que la solution pour toute condition initiale de (2.3.10) est unique ni même existe. Nous traiterons ce point important par la suite car il dépend directement du choix de la fonction a(.) et donc du retour d'état dynamique choisi.

Nous utiliserons indifféremment C(z) ou $C(z_1, z_2)$ suivant qu'il sera nécessaire ou non de faire la distinction entre z_1 et z.

Hypothèse 2.3.1. Nous dirons que le système (2.3.10) vérifie l'hypothèse 2.3.1 si l'implication suivante est vérifiée :

$$\{z \neq 0 \ et \ C(z) \leq 0\} \Rightarrow \{C(z_1, a(z_1)) \geq \alpha_1(\|z_1\|)\}$$
 (2.3.11)

où $\alpha_1: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue strictement croissante telle que $\alpha_1(0) = 0$. Suivant les notations de Hahn [1967], une telle fonction sera dite de classe \mathcal{K} .

La définition 1.2.6 de la stabilité asymptotique est basée sur la notion de trajectoire et donc peut être appliquée aux systèmes discontinus de la forme (2.3.10). On notera que nous considérons le cas où les solutions peuvent être multiples. Il est clair que dans notre cas la stabilité doit être imposée à la première partie z_1 de l'état du système (2.3.10) car c'est celle qui correspond à l'état du système contrôlé (2.3.3). Quant à z_2 , il correspond à l'état interne du contrôleur et une simple condition de borne semble devoir être raisonnablement requise. Ainsi, nous définissons :

Définition 2.3.1. Le système (2.3.10) sera dit asymptotiquement stable par rapport à la dynamique z_1 si et seulement si il vérifie :

- $-z_1$ est uniformément asymptotiquement stable
- il existe R_2 tel que pour toute solution $z_2(.;z^0)$ et tout $t \geq 0$, $||z_2(t;z^0)|| \leq R_2(z^0)$ où $z(t;z^0)$ est une solution à l'instant t de (2.3.10) avec z^0 comme condition initiale.

Le premier point de la définition 2.3.1 est parfois appelé stabilité asymptotique de l'ensemble $\{0 \times \Omega_2\}$.

L'objectif de la suite est de donner une caractérisation en terme de fonctions de Lyapounov de la définition 2.3.1 pour des systèmes de la forme 2.3.10 vérifiant l'hypothèse 2.3.1. Pour un résultat plus général, la fonction de Lyapounov U, que nous considérerons ici, ne sera pas supposée continue. Comme dans les travaux de Zubov [1957] et Roxin [1965], où sont généralisés certains éléments de la théorie de Lyapounov au cas discon-

tinu, il est nécessaire d'introduire une fonction ϱ de classe \mathcal{K} qui n'a pas lieu d'être dans le cas continu temps invariant.

Proposition 2.3.2. En utilisant les notations précédentes, un système de la forme (2.3.10) vérifiant l'hypothèse 2.3.1 et tel que, pour toute condition initiale, la trajectoire $z_2(.)$ reste bornée, sera asymptotiquement stable par rapport à la dynamique z_1 si il existe une fonction $U: \Omega \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. U est radialement non bornée :

$$\lim_{\substack{\|z_1\|\to\infty\\z_1\in\Omega_1}}U(z)=+\infty$$

- 2. U est définie positive par rapport à l'ensemble $\{0 \times \Omega_2\}$:
 - (a) pour tout $z_2 \in \Omega_2$, $U(0, z_2) = 0$
 - (b) il existe une fonction ϱ de classe K telle que

$$\{z_1 \neq 0\} \Rightarrow \{U(z) > \varrho(||z_1||) > 0\}$$

3. pour toute condition initiale $z^0 \in \Omega$, la trajectoire du système vérifie :

$$\left\{C(z(t;z^0)) \le 0\right\} \ \Rightarrow \ \left\{U(z(t+0^+;z^0)) - U(z(t;z^0)) \le 0\right\} \ (2.3.12)$$

$$\left\{C(z(t;z^{0})) > 0\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dU(z(t;z^{0}))}{dt} & existe \ et \ v\'{e}rifie \\ \frac{dU(z(t;z^{0}))}{dt} \leq -\alpha_{2}(\|z_{1}(t;z^{0})\|) \end{cases}$$
(2.3.13)

où $\frac{dU(z(t;z^0))}{dt}$ est la dérivée de U le long de la trajectoire et α_2 est une fonction de classe K.

La proposition ci-dessus est intuitivement satisfaisante. En effet, comme U est décroissante le long de la trajectoire et U est radialement non bornée par rapport à z_1 , la stabilité de z_1 est assurée. L'attractivité découle alors de l'hypothèse 2.3.1.

Preuve de la proposition 2.3.2 :

La stabilité uniforme découle d'un théorème inverse sur la stabilité des systèmes discontinus par rapport à un ensemble établi par Zubov [Roxin, 1965, théorème 9.1]. Appliqué à notre système, on peut déduire que l'ensemble $\{0 \times \Omega_2\}$ est stable puisque c'est l'ensemble pour lequel U est nulle. Reste donc à prouver que l'origine de Ω_1 est attractive pour la première partie de l'état z_1 .

Remarquons tout d'abord que, comme $z_2(.;z^0)$ est borné, $z_1(.;z_0)$, en tant que solution de l'équation différentielle (2.3.10a) $\dot{z}_1 = \bar{f}(z_1,z_2)$ où \bar{f} est continue, est uniformément continue. Comme α_2 est supposée continue, elle est uniformément continue sur tout intervalle borné de \mathbb{R}^+ . En conséquence, la fonction $t \to \alpha_2(\|z_1(t;z^0)\|)$ est uniformément continue.

Puisque la fonction du temps $U(z(.;z^0))$ est décroissante et minorée, elle admet une limite. Soit l cette limite :

$$\lim_{t \to \infty} U(z(t; z^0)) = l \ge 0$$

Deux cas se présentent :

– soit $C(z(\tau;z^0))$ ne s'annule jamais pour tout $\tau \in [0,t]$, auquel cas :

$$U(z(t;z^{0})) - U(z^{0}) \leq \int_{0}^{t} \alpha_{2}(\|z(\tau;z^{0})\|) d\tau$$
 (2.3.14)

– Soit C s'annule ponctuellement. Dans ce cas, l'évolution de $C(z(t;z^0))$ au cours du temps est similaire à celle représentée figure 2.3.

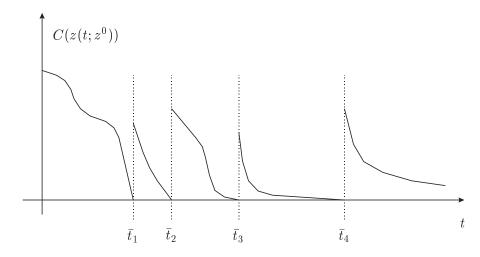


Figure 2.3 – Évolution de C le long des trajectoires

Il existe alors une séquence d'instants $(\bar{t}_k)_{k\in[0,n]}$ telle que pour tout $k\in[0,n]$, $t\geq \bar{t}_n>\bar{t}_{n-1}>\cdots>\bar{t}_1>\bar{t}_0\geq 0$ et $C(z(\bar{t}_k;z^0))=0$. En notant pour tout t, $z(t):=z(t;z^0)$, on a alors :

$$\begin{split} U(z(t)) - U(z^{0}) &= U(z(t)) - U(z(\bar{t}_{n})) + \sum_{k=1}^{n} \left[U(z(\bar{t}_{k})) - U(z(\bar{t}_{k-1})) \right] + U(z(\bar{t}_{0})) - U(z^{0}) \\ &= \left[\int_{\bar{t}_{n}+0^{+}}^{t} \frac{dU}{dt}(z(\tau)) d\tau + U(z(\bar{t}_{n}+0^{+})) - U(z(\bar{t}_{n})) \right] + \\ &\sum_{k=1}^{n} \left[\int_{\bar{t}_{k-1}+0^{+}}^{\bar{t}_{k}} \frac{dU}{dt}(z(\tau)) d\tau + U(z(\bar{t}_{k-1}+0^{+})) - U(z(\bar{t}_{k-1})) \right] + \\ &\left[\int_{0^{+}}^{\bar{t}_{0}} \frac{dU}{dt}(z(\tau)) d\tau + U(z(0^{+})) - U(z^{0}) \right] \\ & \leq - \int_{\bar{t}_{n}+0^{+}}^{t} \alpha_{2}(||z_{1}(\tau)||) d\tau - \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{\bar{t}_{k-1}+0^{+}}^{\bar{t}_{k}} \alpha_{2}(||z_{1}(\tau)||) d\tau \right] - \int_{0^{+}}^{\bar{t}_{0}} \alpha_{2}(||z_{1}(\tau)||) d\tau \end{split}$$

ce qui donne :

$$U \leq z(t) \int_{0}^{t} -\alpha U(|z^{0}(r; z^{0})||) d\tau \qquad (2.3.15)$$

Dans les deux cas (2.3.14) et (2.3.15), la fonction $t \to -\int_0^t \alpha_2(\|z(\tau;z^0)\|)$ est une fonction décroissante, minorée par $l-U(z^0)$ et donc convergente. La fonction $t \to \alpha_2(\|z(t;z^0)\|)$ est uniformément continue; par conséquent, en appliquant le lemme de Barbalat [Khalil, 1996, lemme 4.2], on a :

$$\lim_{t \to \infty} \alpha_2(\left\| z(t; z^0) \right\|) = 0$$

et donc, comme α_2 est de classe \mathcal{K} :

$$\lim_{t \to \infty} z(t; z^0) = 0$$

La stabilité asymptotique de la première partie z_1 de l'état z est donc établie.

2.3.4 Expression du retour d'état

Nous allons ici expliciter le retour d'état proposé. Nous commencerons par exposer les hypothèses, ensuite nous verrons le retour d'état proprement dit avant d'établir que le système bouclé obtenu (étant de la forme du système bouclé (2.3.3)) est asymptotiquement stable par rapport à la dynamique du système.

2.3.4.1 Hypothèses

Rappelons que nous nous intéressons à la classe des systèmes affines en la commande de la forme (2.3.1) avec f et g continues.

Nous supposerons tout d'abord que le système (2.3.1) vérifie :

Hypothèse 2.3.3. Il existe une fonction ψ de classe \mathcal{K}_{∞} (fonction de classe \mathcal{K} avec $\lim_{r\to\infty} \psi(r) = \infty$) telle que pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pour tout $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^p$ et tout $t_f > 0$:

$$||x(t_f)||^2 + \int_0^{t_f} ||x(\tau)||^2 + ||u(\tau)||^2 d\tau \ge \psi \left(\sup_{0 \le \delta \le t_f} ||x(\delta)|| \right)$$
 (2.3.16)

Cette hypothèse est très peu restrictive en pratique. En effet, elle signifie simplement que le système ne peut être ramené à l'origine infiniment rapidement avec une commande bornée.

Ensuite, nous partirons de l'hypothèse que :

Hypothèse 2.3.4. Il existe trois réels strictement positifs T, ρ_1 et ρ_2 , une fonction C^1 , $V:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ et $\gamma\in[0,1[$ tels que l'on ait :

1. V vérifie pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ l'équation au dérivées partielle (EDP) avec contrainte finale suivante :

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(x) + \rho_2 x^T x - \frac{1}{4\rho_1} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}^T = 0 \quad (2.3.17a)$$

$$V(T,x) = ||x||^2 \qquad (2.3.17b)$$

2. V vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité suivante :

$$V(0,x) \le \gamma \|x\|^2 \tag{2.3.18}$$

En utilisant les résultats portant sur l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, on constate que la fonction V(0,x) qui satisfait l'hypothèse 2.3.4 est la valeur optimale du problème de minimisation de la fonction coût suivante :

$$||x(T)||^{2} + \int_{t}^{T} \left[\rho_{2} ||x(\tau)||^{2} + \rho_{1} ||u(\tau)||^{2}\right] d\tau$$
 (2.3.19)

où $x(\tau)$ est la trajectoire qui satisfait x(t) = x. La condition (2.3.18) impose alors un propriété supplémentaire sur cette solution optimale : la trajectoire optimale doit en effet d'après (2.3.18) être telle que la norme de l'état "final" ||x(T)|| est plus petite que $\gamma ||x(0)||$.

L'objectif est alors de prouver que ces hypothèses sont suffisantes pour construire un retour d'état tel que la boucle fermée ait un comportement similaire au comportement générique décrit par la figure 2.4.

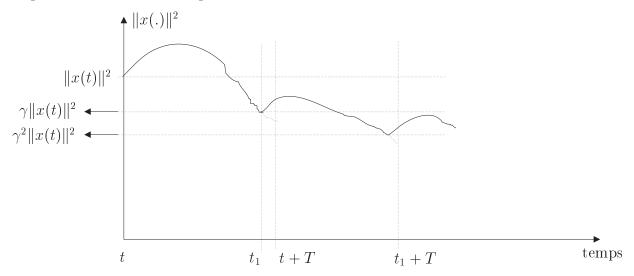


Figure 2.4 – Exemple de comportement de la boucle fermée

2.3.4.2 Formulation du retour d'état

Théorème 2.3.5. Soit un système de la forme (2.3.1) vérifiant les hypothèses 2.3.3 et 2.3.4. Alors le système en boucle fermée suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x,\zeta) \tag{2.3.20a}$$

$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} lorsque C(x,\zeta) > 0$$
 (2.3.20b)

$$\zeta = \begin{pmatrix} ||x|| \\ T \end{pmatrix} lorsque C(x,\zeta) \le 0$$
 (2.3.20c)

avec:

$$C(x,\zeta) := \min \left\{ \|x\| - \frac{1+\gamma}{2}\zeta_1, \frac{1+\gamma}{2}\zeta_1 - V(T-\zeta_2, x) \right\}$$
 (2.3.21)

et avec la commande donnée par :

$$u(x,\zeta) := \frac{-1}{2\rho_1} g^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \bigg|_{(T-\zeta_2,x)}$$
 (2.3.22)

est asymptotiquement stable par rapport à la dynamique x du système au sens de la définition 2.3.1.

2.3.4.3 Preuve du théorème 2.3.5

Avant de développer la preuve du théorème 2.3.5, nous avons besoin du lemme suivant : Lemme 2.3.6. Sous les hypothèses du théorème 2.3.5, on a :

$$V(T - \zeta_2, x) \ge \min(\rho_1, \rho_2)\psi(\|x\|)$$
 (2.3.23)

Preuve du lemme 2.3.6:

Soit un instant t>0 et une commande u(.) définie sur l'intervalle de temps $[t,\infty[.t]$ ne varie pas tout au long du raisonnement qui suit. Pour tout $\tau>t$ où le terme de solution a un sens, notons simplement $x(\tau):=x(\tau;x,t,u)$ où x=x(t) est une constante; $x(\tau)$ est la valeur de l'état du système (2.3.20) à l'instant τ avec x(t) comme condition initiale à $\tau=t$ et comme commande u. On peut alors définir la fonction de coût suivante :

$$J(t, x, \zeta_2, u) := \|x(t + \zeta_2)\|^2 + \int_t^{t + \zeta_2} \rho_2 \|x(\tau)\|^2 + \rho_1 \|u(\tau)\|^2 d\tau \ (2.3.24)$$

En utilisant la propriété $V(T,x) = ||x||^2$, on peut ré-écrire la pondération sur l'état final et obtenir :

$$||x(t+\zeta_2)||^2 = V(T-\zeta_2, x) + \int_t^{t+\zeta_2} \frac{dV}{d\tau} (\tau + T - t - \zeta_2, x(\tau)) d\tau \qquad (2.3.25)$$

En utilisant légalité (2.3.17a) afin de remplacer les dérivées $\frac{dV}{d\tau}(\tau + T - t - \zeta_2, x(\tau))$, on obtient :

$$\frac{dV}{d\tau} \left(\tau', x(\tau) \right) \quad = \quad \frac{\partial V(\tau', x(\tau))}{\partial t} + \frac{\partial V(\tau', x(\tau))}{\partial x} \left[f(x(\tau)) + g(x(\tau)) u(\tau) \right]$$

$$= \frac{\partial V(\tau', x(\tau))}{\partial x} g(x(\tau)) u(\tau) - \rho_2 \|x(\tau)\|^2 + \frac{1}{4\rho_1} \frac{\partial V(\tau', x(\tau))}{\partial x} g(x(\tau)) g^T(x(\tau)) \frac{\partial V(\tau', x(\tau))}{\partial x}^T$$
(2.3.26)

avec $\tau' := \tau + T - t - \zeta_2$.

En combinant les équations (2.3.26) avec (2.3.25), l'équation (2.3.24) devient :

$$J(t, x, \zeta_2, u) = V(T - \zeta_2, x) + \int_t^{t+\zeta_2} \rho_1 \| u(\tau) - u^*(\tau', x(\tau)) \|^2 d\tau \qquad (2.3.27)$$

où:

$$u^{\star}(\tau', x(\tau)) := -\frac{1}{2\rho_1} g^T(x(\tau)) V_x^T(\tau', x(\tau))$$
 (2.3.28)

Notons que u^* dépend de ζ_2 au travers de τ' . L'équation (2.3.27) permet d'écrire pour tout u que :

$$V(T - \zeta_2, x) = J^*(t, x, \zeta_2) \ge 0 \tag{2.3.29}$$

où $J^*(t, x, \zeta_2)$ est la valeur optimale de la fonction coût $J(t, x, \zeta_2, u)$ obtenue lorsque la commande u(.) est prise égale à la valeur "optimale" $u^*(\tau', x(.))$ avec ζ fixé. En conséquence, on a :

$$V(T - \zeta_2, x) = \|x^*(t + \zeta_2)\|^2 + \int_t^{t + \zeta_2} \left[\rho_2 \|x^*(\tau)\|^2 + \rho_1 \|u^*(\tau', x^*(\tau))\|^2\right] d\tau (2.3.30)$$

avec $x^*(\tau)$ solution du système en boucle fermée :

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau)) + g(x(\tau))u^{*}(\tau + T - t - \zeta_{2}, x(\tau))$$
(2.3.31)

avec x(t) = x comme condition initiale et où ζ est un paramètre fixé et $u^*(\tau', x(\tau))$ donné par l'équation (2.3.28).

En utilisant (2.3.16) et (2.3.30) on peut alors conclure que :

$$V(T - \zeta_2, x) \ge \min(\rho_1, \rho_2)\psi(\|x\|) \tag{2.3.32}$$

Revenons à la preuve du théorème 2.3.5. Notons dans un premier temps que ici on a :

$$\Omega := \left\{ (x, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times [0, T] \right\}$$

$$\Omega_1 := \mathbb{R}^n,$$

$$\Omega_2 := \left\{ (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] \right\}$$

La preuve est décomposée en deux parties. Dans un premier temps, nous discuterons de l'existence et de l'unicité éventuelle de la trajectoire. L'objectif est ensuite d'établir que le système bouclé (2.3.20) vérifie l'hypothèse 2.3.1 et que :

$$U(z) := U(x,\zeta) = V(T - \zeta_2, x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sup_{\bar{x} \in \mathcal{B}\left(\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^k \zeta_1\right)} V(0, \bar{x}) \right]$$
(2.3.33)

est une fonction de Lyapounov pour le système en boucle fermée au sens de la proposition 2.3.2.

Existence et unicité de la solution :

L'existence d'une solution au système bouclé (2.3.20) est une conséquence directe d'un point déjà souligné dans la preuve de la proposition 2.3.2. En effet, si le système vérifie l'hypothèse 2.3.1, alors les discontinuités ne peuvent survenir qu'à des instants $(\bar{t}_k)_{k\in\mathbb{N}}$; et donc qu'en un nombre dénombrable d'instants. Sur chacun des intervalles $[\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}[$, le système bouclé (2.3.20) admet au moins une solution pour toute condition initiale dans la mesure où toutes les fonctions intervenant sont continues. Les solutions générales sont alors définies comme la juxtaposition des solutions sur chacun des intervalles $[\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}[$ en prenant comme condition initiale $x(\bar{t}_k)$ et $a(x(\bar{t}_k))$ comme initialisation pour l'intégration sur l'intervalle $[\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}[$.

L'unicité de la trajectoire ne peut par contre être établie avec les hypothèses formulées et il est nécessaire pour l'obtenir d'ajouter l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.3.7. Pour toute condition initiale $(t, x(t), \zeta(t))$, la solution du système différentiel :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x,\zeta)$$

$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est unique sur l'intervalle [t, t+T].

Quoiqu'il en soit, l'unicité de la trajectoire n'est pas un élément nécessaire à la stabilité de la boucle fermée qui sera, dans le cas de solutions multiples, uniforme par rapport à ces solutions.

Stabilité asymptotique par rapport à x:

1. Établissons tout d'abord que toute solution partant dans Ω reste dans Ω :

Cela revient à prouver que ζ_2 reste dans [0,T]. En, effet, x reste dans \mathbb{R}^n et ζ_1 dans \mathbb{R}^+ , car ζ_1 reste constant lorsque $C(x,\zeta)>0$, et est initialisé à une valeur positive lorsque $C(x,\zeta)\leq 0$.

D'après les équations (2.3.20b) et (2.3.20c), on sait que $\zeta_2 \leq T$. Ces deux équations nous informent également que si ζ_2 devait devenir négatif, il existerait un instant $t^* > 0$ pour lequel $\zeta_2(t^*) = 0$. Dans ce cas, on aurait par l'égalité (2.3.17b) :

$$V(T - \zeta_2(t^*), x(t^*)) = V(T, x(t^*)) = ||x(t^*)||^2$$

et il découlerait de la définition (2.3.21):

$$C(x(t^*), \zeta(t^*)) = \min \left\{ \|x(t^*)\| - \frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(t^*), \frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(t^*) - \|x(t^*)\| \right\} \le 0$$

 $\zeta_2(t^*)$ serait alors imposé à la valeur T par l'équation (2.3.20c). En conséquence, toute solution partant de Ω reste dans Ω .

2. Prouvons maintenant que le système (2.3.20) vérifie l'hypothèse 2.3.1 avec C donné par (2.3.21):

Dans le cas du système bouclé (2.3.20), on a $a(z_1) = \binom{\|x\|^2}{T}$. Par définition de C:

$$C(z_{1}, a(z_{1})) = C(x, a(x)) = \min \left\{ \frac{1 - \gamma}{2} \|x\|, \frac{1 + \gamma}{2} \|x\| - V(0, x) \right\}$$

$$\geq \min \left\{ \frac{1 - \gamma}{2} \|x\|, \frac{1 + \gamma}{2} \|x\| - \gamma \|x\| \right\} = \frac{1 - \gamma}{2} \|x\|$$

$$(2.3.18)$$

En conséquence, le système (2.3.20) avec C défini par l'équation (2.3.21) vérifie l'hypothèse 2.3.1 avec $\alpha_1(r) = \frac{1-\gamma}{2}r$.

- 3. Enfin, prouvons que U définie par l'équation (2.3.33) est une fonction de Lyapounov au sens de la proposition 2.3.2 :
- U est définie positive par rapport à $\{0 \times \Omega_2\}$: D'après l'équation (2.3.17b), V(T,0)=0. Il découle de (2.3.23) et (2.3.18) que :

$$0 = \min(\rho_1, \rho_2) \psi(\|0\|) \underbrace{\leq}_{(2.3.23)} V(0, 0) \underbrace{\leq}_{(2.3.18)} \gamma \|0\| = 0$$

En conséquence, d'après la définition de U, donnée par l'équation (2.3.33), on a :

$$U(0) = V(T,0) + \sum_{k=1}^{+\infty} [V(0,0)] = 0$$

Montrons maintenant que $\{x \neq 0\} \Rightarrow \{U(z) > 0\}$ provient de (2.3.23) :

$$U(z) = V(T - \zeta_{2}, x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sup_{\bar{x} \in \mathcal{B}\left(\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{k} \zeta_{1}\right)} V(0, \bar{x}) \right]$$

$$\geq \min(\rho_{1}, \rho_{2}) \psi(\|x\|) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sup_{\bar{x} \in \mathcal{B}\left(\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{k} \zeta_{1}\right)} \min(\rho_{1}, \rho_{2}) \psi(\|\bar{x}\|) \right]$$

$$\geq \min(\rho_{1}, \rho_{2}) \psi(\|x\|) + \min(\rho_{1}, \rho_{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\psi\left(\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{k} \zeta_{1}\right) \right] \quad (2.3.34)$$

$$\geq \min(\rho_{1}, \rho_{2}) \psi(\|x\|) \quad \text{pour tout } x \text{ et } \zeta$$

$$\geq 0 \quad \text{si } x \neq 0 \text{ car } \psi \text{ est de classe } \mathcal{K}$$

donc U vérifie le second point de la proposition 2.3.2 en prenant $\varrho(r) := \min(\rho_1, \rho_2)\psi(r)$.

- U est radialement non bornée : De (2.3.34) on déduit facilement que $\lim_{\|x\|\to+\infty} U(z) = +\infty$.

 $-z_2$ est bornée :

Comme nous l'avons vu précédemment, $\zeta_2 \in [0, T]$ et donc est bornée. De (2.3.34) on déduit facilement que $\lim_{\|\zeta_1\| \to +\infty} U(z) = +\infty$. Comme U est radialement non bornée en z_1 et ζ_2 est bornée, l'ensemble $\mathcal{V}_{\varepsilon} := \{z \in \Omega; \ V(z) \leq \varepsilon\}$ est nécessairement

borné, et, par conséquent, $\zeta_1(.;z^0)$ l'est également.

- U est strictement décroissante le long des trajectoires du système (2.3.20) lorsque C(z) > 0 (U vérifie l'équation (2.3.13)) :

D'après la définition de U, et en utilisant le fait que d'après (2.3.20b) ζ_1 reste constant tant que C reste strictement positif, le long des trajectoires du système, on a donc :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV(T - \zeta_2(t), x(t))}{dt}$$

$$= -\frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))}{\partial t} \dot{\zeta}_2(t) + \frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))}{\partial x} \dot{x}(t)$$

$$= \frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))}{\partial x} [f(x(t)) + g(x(t))u(x(t), \zeta(t))]$$

$$= -\rho_2 ||x(t)||^2 + \frac{1}{4\rho_1} \frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))}{\partial x} g(x(t))g^T(x(t)) \frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))^T}{\partial x} + \frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))}{\partial x} g(x(t))u(x(t), \zeta(t))$$

$$= -\rho_2 ||x(t)||^2 - \frac{1}{4\rho_1} \frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))}{\partial x} g(x(t))g^T(x(t)) \frac{\partial V(T - \zeta_2(t), x(t))^T}{\partial x}$$

et donc:

$$\frac{dU}{dt} \le -\rho_2 \|x(t)\|^2 \tag{2.3.35}$$

en conséquence, U vérifie (2.3.13) avec $\alpha_2(r) = \rho_2 r^2$.

– U est décroissant lorsque $C(z) \leq 0$ (U vérifie l'équation (2.3.12)) :

D'après l'évolution temporelle de C, imposée par l'hypothèse 2.3.1, C ne s'annule qu'après une période non nulle pendant laquelle il évolue de manière continue dans la mesure où (x,ζ) est solution de l'équation différentielle (2.3.20a-2.3.20b) et donc évolue de manière continue. Soit t l'instant où C s'annule. On a, à ce moment là :

$$U(z(t)) = V(T - \zeta_2(t), x(t)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sup_{\bar{x} \in \mathcal{B}\left(\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^k \zeta_1(t)\right)} V(0, \bar{x}) \right]$$
(2.3.36)

en utilisant (2.3.20c) et la continuité de la trajectoire de x, on obtient à l'instant $t+0^+$:

$$U(z(t+0^{+})) = V(0,x(t)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sup_{\bar{x} \in \mathcal{B}\left(\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{k} || x(t)||\right)} V(0,\bar{x}) \right]$$
(2.3.37)

Or d'après la définition de C donnée par l'équation (2.3.21), C ne s'annule que si on a, soit $||x(t)|| = \frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(t)$, soit $V(T-\zeta_2(t),x(t)) = \frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(t)$:

– Dans le premier cas, en soustrayant l'équation (2.3.36) de (2.3.37) après avoir

remplacé $\zeta_1(t)$ par $\frac{2}{1+\gamma} ||x(t)||$, on obtient :

$$U(z(t+0^{+})) - U(z(t)) = V(0,x(t)) - V(T - \zeta_{2}(t),x(t)) - \sup_{\bar{x} \in \mathcal{B}(||x(t)||)} V(0,\bar{x})$$
< 0

 $\operatorname{car} V(0, x(t)) \le \sup_{\bar{x} \in \mathcal{B}(||x(t)||)} V(0, \bar{x}) \text{ et d'après } (2.3.23), V(T - \zeta_2(t), x(t)) \ge 0.$

On obtient donc, dans ce cas, la propriété désirée.

– Dans le second cas, en intégrant $t \to \frac{dV(T-\zeta_2(t),x(t))}{dt}$ sur un intervalle de temps $[\tau,t]$ suffisamment petit avant que C ne s'annule, on obtient :

$$V(T - \zeta_2(t), x(t)) - V(T - \zeta_2(\tau), x(\tau)) \leq 0$$
(2.3.38)

A l'instant τ on a $C(\tau)>0$ et donc d'après (2.3.21), $V(T-\zeta_2(\tau),x(\tau))<\frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(\tau)$. Puisqu'à l'instant t où C s'annule, on a $V(T-\zeta_2(t),x(t))=\frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(t)$. L'équation (2.3.38) devient:

$$\frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(t) < \frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(\tau)$$

Cette inégalité contredit le fait que ζ_1 reste constant tant que C reste strictement positif. $V(T - \zeta_2(t), x(t)) = \frac{1+\gamma}{2}\zeta_1(t)$ est donc impossible.

2.3.5Exemples

Ici, nous allons présenter l'application du retour d'état présenté précédemment à quelques exemples de systèmes non linéaires. L'implémentation numérique de la méthode a été effectuée en utilisant les routines NumSol d'intégration des équations d'Hamilton-Jacobi-Isaac développées par Balloul et Alamir [1999]. La résolution numérique des équations d'Hamilton-Jacobi-Isaac est encore relativement lourde et gourmande en temps de calcul, aussi les exemples ont un nombre limité d'états. L'évolution de l'informatique tant sur le plan matériel que sur l'évolution des routines ne pourront que profiter à notre méthode.

2.3.5.1Pendule inversé

On considère le pendule inversé dont les équations dynamiques sont [Khalil, 1996, exemple 1.3]:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
 (2.3.39a)

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{l}\sin(x_1) - klx_2 + \frac{1}{ml^2}u$$
 (2.3.39b)

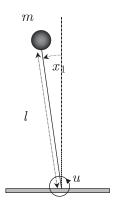


Figure 2.5 – Pendule inversé (2.3.39)

où g est la constante de gravité, k le coefficient de friction, l et m sont respectivement la longueur et la masse du pendule.

L'application de la commande proposée donne le résultat représenté sur la figure 2.6. Les valeurs numériques utilisées sont consignées dans le tableau 2.1.

g	k	1	m
$9.81 N m^{-1}$	$0.001 m^{-1} s^{-1}$	0.3 m	0.2 kg

Tableau 2.1 – Données numériques

2.3.5.2 Le satellite à deux moteurs

La stabilisation des vitesses angulaires d'un satellite en utilisant que deux moteurs (au lieu des trois normalement disponibles), représentant le cas où un des moteurs est en panne, est un problème classique en automatique non linéaire [Brockett et al., 1983; Aeyels et Szafranski, 1988; Sontag et Sussmann, 1988; Outbib et Sallet, 1992; Outbib, 1994]. Il est établi que ce système est contrôlable [Bonnard, 1982] et stabilisable par un retour d'état \mathcal{C}^{∞} [Aeyels et Szafranski, 1988; Sontag et Sussmann, 1988]. Cependant, c'est un exemple classique de système sous-actionné (trois degrés de liberté pour seulement deux commandes), une classe qui est l'objet d'un intérêt grandissant ces dernières années.

L'orientation d'un satellite peut être modélisée par divers paramètres du groupe orthogonal SO(3). Nous considérerons ici la plus classique. Soit F_s un repère du référentiel satellite dont les axes correspondent aux trois principaux axes d'inertie du satellite. Soit F_f un repère du référentiel terrestre et $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ la vitesse angulaire du repère F_s par rapport au repère terrestre F_f (ω est exprimé dans le repère F_s).

Avec les conventions précédentes, les équations de la dynamique du satellite à deux moteurs sont :

$$\dot{\omega_1} = \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 + u_1 \tag{2.3.40a}$$

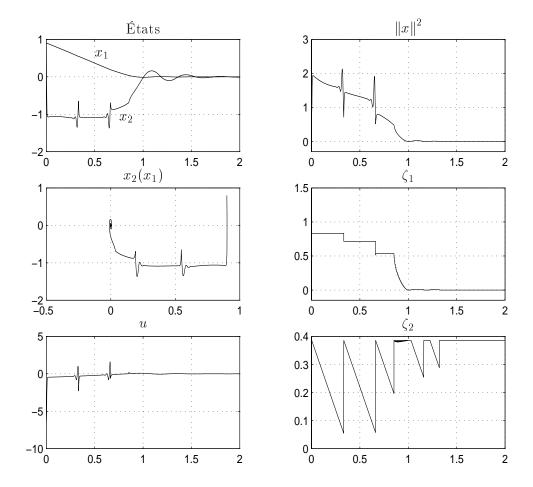


Figure 2.6 – Stabilisation du pendule inversé (2.3.39)

$$\dot{\omega_2} = \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_3 \omega_1 + u_2 \tag{2.3.40b}$$

$$\dot{\omega_3} = \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2 \tag{2.3.40c}$$

où $J_1,\,J_2$ et J_3 sont les moments d'inertie du satellite par rapports aux axes d'inertie.

Le retour d'état du théorème 2.3.5 donne un système bouclé dont les trajectoires sont représentées sur la figure 2.7. On remarquera l'évolution de la norme de l'état symptomatique de la méthode utilisée et déjà illustrée par la figure 2.4. Les valeurs numériques choisies sont celles du satellite SPOT4 [Sira-Ramirez et Siguerdidjane, 1996] :

J_1	J_2	J_3
$2500~kgm^2$	$6500kgm^2$	$8500~kg~m^2$

Tableau 2.2 – Données numériques du satellite SPOT4 [Sira-Ramirez et Siguerdidjane, 1996]

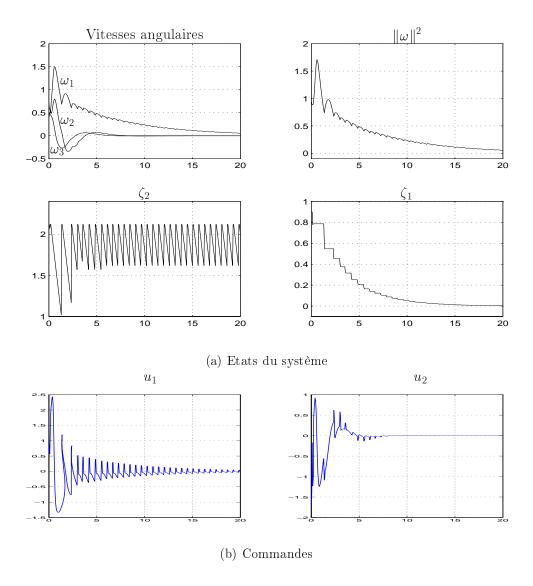


Figure 2.7 – Commande de la vitesse angulaire du satellite à deux moteurs (2.3.40)

La figure 2.8 présente une comparaison entre le retour d'état proposé et les retours d'état proposé dans la littérature par Brockett et al. [1983] :

$$u_1 = \frac{1}{a} \left(-a\omega_1 + c\omega_3 - bc\omega_2\omega_3 \right)$$

$$u_2 = \frac{1}{b} \left(-b\omega_2 - c^2\omega_3^2 - ac\omega_1\omega_3 \right)$$

et par Aeyels [1985]:

$$u_1 = \frac{1}{a} \left(-a\omega_1 + \alpha c^2 \omega_3^2 - bc\omega_2 \omega_3 \right)$$

$$u_2 = \frac{1}{b} \left(-b\omega_2 + \beta c^3 \omega_3^3 - ac\omega_1 \omega_3 \right)$$

tous deux obtenus à partir du théorème sur la variété centre, où :

$$a := \sqrt{\left| \frac{J_3 - J_1}{J_2} \frac{J_1 - J_2}{J_3} \right|}$$

$$b = \sqrt{\left| \frac{J_2 - J_3}{J_1} \frac{J_1 - J_2}{J_3} \right|}$$

$$c = \sqrt{\left| \frac{J_2 - J_3}{J_1} \frac{J_3 - J_1}{J_2} \right|}$$

Les paramètres de réglages $\alpha = 10$ et $\beta = -10$ ont été choisi de sorte que les excusions des états et les commandes soient du même ordre de grandeur dans les trois cas. Les résultats montrent une meilleur capacité de la méthode proposée à ramener le système à l'origine. En contre partie, la commande est discontinue ce qui n'est pas le cas des deux autres approches.

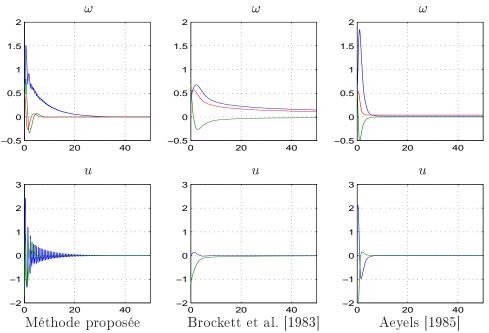


Figure 2.8 – Comparaison du retour d'état proposé avec la littérature

Système non stabilisable par un retour d'état \mathcal{C}^1 2.3.5.3

Nous considérons l'exemple donné par Kawski [1990] :

$$\dot{x}_1 = u$$
 (2.3.41a)
 $\dot{x}_2 = x_2 - x_1^3$ (2.3.41b)

$$\dot{x}_2 = x_2 - x_1^3 \tag{2.3.41b}$$

Le linéarisé autour de l'origine est alors :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

2.4. Conclusion 53

avec:

$$A := \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \qquad B := \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right)$$

Il est clair que le système ne vérifie pas la première des conditions de Brockett car le linéarisé possède un mode incontrôlable est associé à une valeur propre instable.

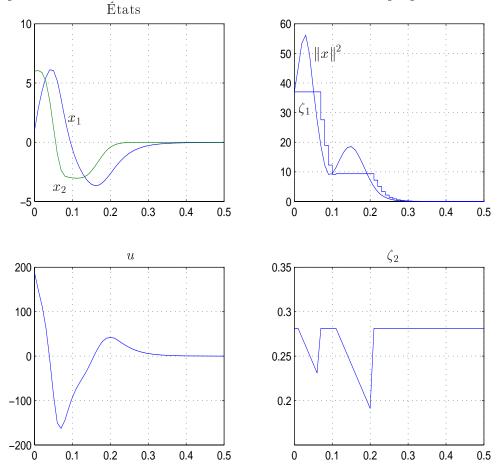


Figure 2.9 – Stabilisation du système (2.3.41)

L'application du retour d'état défini au théorème 2.3.5 est représentée sur la figure 2.9. La figure 2.10 présente une comparaison entre le retour d'état exposé ci-dessus et le retour d'état $u(x) = (-x_1 + \frac{4}{3}Ex_2^{\frac{1}{3}} + K(x_2 - x_1^3)$ proposé par Kawski [1990] avec E = 500 et K = 3 de sorte que les excursions et les temps de convergence soient du même ordre de grandeur dans les deux cas.

2.4 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre porte sur la stabilisation des systèmes affines en la commande par un retour d'état discontinu et dynamique. Une caractérisation de la

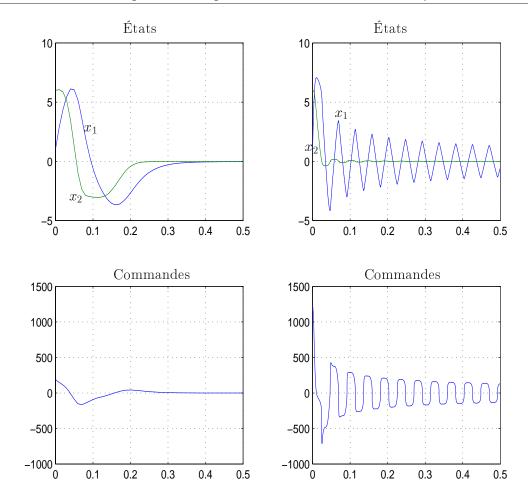


Figure 2.10 – Comparaison du retour d'état proposé (gauche) avec la littérature (droite)

stabilité de la boucle fermée a été élaborée en terme de d'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman avec contrainte finale d'inégalité. Celle-ci prend la forme d'un système différentiel "avec changement de modèle" atypique en automatique et dans les travaux sur la stabilité. Les propriétés de stabilité de la boucle fermée peuvent ainsi être clairement établies. Des exemples, dont un ne vérifiant pas les conditions de Brockett, ont également été proposés. Il reste à étudier le comportement d'un tel retour d'état sur un système ne vérifiant pas la dernière des conditions de Brockett. De par sa nature discontinue et dynamique, rien n'indique qu'une telle approche ne puisse pas être une alternative aux retours d'état temps variants.

Chapitre 3

Contrôlabilité, stabilisabilité et stabilisation

3.1 Introduction

Le lien entre contrôlabilité et stabilisabilité est une question importante en automatique non linéaire, où l'on cherche souvent les analogies avec le cas linéaire. Cette question nous a intéressé car on peut naturellement penser qu'une approche de type horizon fuyant peut apporter des éléments de réponses au problème. En effet, cette approche, consistant à chaque instant à générer une trajectoire en boucle ouverte et à la suivre, soit pendant un temps infinitésimal dans le schéma temps-continu, soit pendant une période d'échantillonnage dans le schéma temps-discret, semble pouvoir faire le lien entre la contrôlabilité asymptotique (et donc la boucle ouverte) et la stabilisabilité (et donc la boucle fermée). C'est ce à quoi nous nous sommes attachés et c'est ce qui est présenté dans le premier paragraphe de ce chapitre.

Poursuivant cette étude sur la relation entre la boucle ouverte et la boucle fermée, notre objectif a été de mettre en évidence des propriétés des trajectoires en boucle ouverte, qui permettent de passer des trajectoires en boucle ouverte à un retour d'état globalement stabilisant. Ces propriétés se traduisent par le fait que, pour tout x, toutes les trajectoires en boucle ouverte, passant par x, suivent le même chemin après le point x. En se basant sur ces propriétés, nous construisons un retour d'état stabilisant pour un réacteur exothermique continûment agité.

Ensuite, nous nous sommes attachés à traduire ces propriétés numériquement. Sur une classe de systèmes non linéaires bien déterminée, nous avons développé une version numérique de cette approche. La classe des systèmes considérée contient entre autres les systèmes différentiellement plats et les systèmes chaînés. Nous appliquons l'approche numérique proposée sur des exemples non-linéaires classiques, et, notamment, pour contrôler l'attitude d'un satellite à deux moteurs. Ces résultats sont présentés au paragraphe 3.3.

3.2 Sur la relation entre contrôlabilité et stabilisabilité

Le système considéré par la suite est le suivant :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ et f est continue et localement lipschitz en x uniformément par rapport à u. Cette dernière hypothèse est imposée pour garantir l'existence, pour toute condition initiale et toute commande u(.), essentiellement bornée, de la trajectoire x(.;x,u). En pratique, elle ne sera pas restrictive car les commandes considérées seront choisies dans un ensemble borné.

3.2.1 Relation contrôlabilité-stabilisabilité : le travail de Clarke et al. [1997]

Soulignons, tout d'abord, que l'objectif de cette présentation n'est pas de décrire de façon très détaillée le travail en question. Il est pour cela préférable de se référer à l'original du travail cité. L'objectif est double : il consiste tout d'abord à rendre compte aussi fidèlement que possible de l'idée générale qui sous-tend ce travail afin de mieux comprendre l'approche permettant la construction d'un retour d'état non linéaire à partir de l'hypothèse de contrôlabilité asymptotique. Le second objectif est que cette présentation soit suffisamment détaillée pour que notre propre contribution puisse être clairement dégagée.

Le travail de Clarke et al. est l'unique travail de la littérature que nous ayons trouvé qui n'aborde pas le problème de la relation "contrôlabilité asymptotique - stabilisabilité" en partant d'une hypothèse de régularité du retour d'état. En effet, comme nous l'avons exposé dans le chapitre précédent, une telle hypothèse aboutit à une condition de Brockett sur le système. Il est donc nécessaire de s'affranchir d'une telle hypothèse si l'on veut avancer vers l'objectif. La démarche adoptée par Clarke et al. est dans ce sens relativement intéressante et singulière; elle consiste, en fait, à chercher "jusqu'où" on peut se rapprocher d'un retour d'état statique au sens de la définition 1.3.10 à partir d'une hypothèse de contrôlabilité asymptotique.

Le problème qui se pose alors est le suivant : pour une équation différentielle de la forme (3.2.1) qui régit la dynamique d'un système et pour un retour d'état k ne vérifiant aucune propriété de régularité, le terme même de solution n'a pas forcément un sens.

L'approche de Clarke et al. a donc consisté dans un premier temps à définir un cadre exact dans lequel le terme de solution a un sens. C'est ce que nous développons au paragraphe 3.2.1.1 avant d'énoncer le résultat principal. Il est important de souligner que la définition de la solution de l'équation différentielle adoptée (appelée π -solution) par Clarke et al. découle directement de la manière dont est construit le retour d'état, que nous verrons au paragraphe 3.2.1.3.

3.2.1.1Π-trajectoire et s-stabilité

Définition 3.2.1. On appelle :

- partition de $[0, +\infty[$, toute suite $\pi = (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de nombres tels que :

$$t_0 = 0$$

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \ i < j, \quad t_i < t_j$$

$$\lim_{i \to \infty} t_i = +\infty$$

- diamètre supérieur de la partition π , le nombre défini par :

$$\bar{d}(\pi) := \sup_{i \in \mathbb{N}} \left(t_{i+1} - t_i \right)$$

- diamètre inférieur de la partition π le nombre défini par :

$$\underline{d}(\pi) := \inf_{i \in \mathbb{N}} (t_{i+1} - t_i)$$

 $\underline{d}(\pi) := \inf_{i \in \mathbb{N}} (t_{i+1} - t_i)$ On notera que le diamètre supérieur d'une partition peut être infini et le diamètre inférieur peut être nul.

On peut alors définir la notion de π -trajectoire d'un système différentiel contrôlé par : Définition 3.2.2 (π -trajectoire). La π -trajectoire, associée à un retour d'état k et à une partition π d'un système de la forme (3.2.1), est la fonction du temps obtenue en résolvant successivement pour chaque i :

$$\dot{x} = f(x, k(x(t_i))) \quad sur [t_i, t_{i+1}]$$
 (3.2.2)

en utilisant la valeur finale de l'état $x(t_i)$ sur l'intervalle précédent comme initialisation. On la notera $x_{\pi}(.;x_0,k)$.

L'existence et l'unicité de cette solution découlent de l'hypothèse que f est localement lipschitz en x uniformément par rapport à u.

L'équation (3.2.2) est en fait intermédiaire entre l'intégration d'Euler, où on aurait l'équation $\dot{x} = f(x(t_i), k(x(t_i)))$, et le retour d'état classique qui donne $\dot{x} = f(x, k(x))$.

L'expression de la s-stabilité ci-dessous rappelle l'expression de la stabilité forte de la définition 1.2.4 utilisée dans les travaux de Kurzweil [1957; 1963]. Elle donne une importance primordiale à la boule de départ alors que la définition 1.2.3 privilégie la boule "d'où on ne sort pas". Ce choix découle de la construction du retour d'état qui assure que partant d'une boule de rayon R on aboutit dans une plus petite de rayon raprès un temps T qui ne dépend que des rayons de la boule de départ et de la boule d'arrivée.

Définition 3.2.3. Le système (3.2.1) est dit globalement s-stabilisable s'il existe une fonction mesurable k de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p telle que les π -trajectoires du système bouclé :

$$\dot{x} = f(x, k(x(t_i))) \quad t_i \in \pi$$

soient globalement s-stables, c'est à dire pour tout couple R > r > 0, il existe M(R) > 0, T(R,r) > 0 et $\delta(R,r) > 0$ tels que pour toute partition π telle que $\bar{d}(\pi) < \delta(R,r)$, on ait:

- 1. (trajectoire bornée) $\forall x_0 \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq 0, \quad x_{\pi}(t; x_0, k) \in \mathcal{B}(M(R)).$
- 2. (attractivité) $\forall x_0 \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq T(R,r), \quad x_{\pi}(t; x_0, k) \in \mathcal{B}(r).$
- 3. $(stabilit\acute{e}) \lim_{R\to 0} M(R) = 0.$

Un retour d'état continu qui stabiliserait asymptotiquement le système (3.2.1) au sens de la définition 1.3.11 le stabiliserait également au sens de la définition 3.2.3 [Clarke et al., 1997].

La lettre "s" signifie échantillonnage (sampling en anglais). En effet, le retour d'état est construit comme si l'information concernant l'état n'était disponible qu'aux instants de la partition.

Cette formulation de la stabilité de la π -trajectoire du système bouclé met en évidence le fait que $\delta(R,r)$ peut tendre vers zéro avec R. Il peut être nécessaire d'échantillonner de plus en plus rapidement lorsque l'état tend vers l'origine. Si un tel retour d'état était implanté, seule une stabilisation pratique pourrait être garantie dans la mesure où il semble délicat de modifier la fréquence des échantillonnages.

3.2.1.2 Énoncé du résultat

L'énoncé du résultat établi par Clarke et al. est le suivant :

Théorème 3.2.1 (Clarke et al. [1997]). Soit un système Σ globalement asymptotiquement contrôlable dans le sens de la définition 1.3.8. Supposons de plus qu'il existe un voisinage de l'origine $V(0) \subset \mathbb{R}^n$ et un compact $U \subset \mathbb{R}^p$, tel que pour tout $x_0 \in V(0)$, la commande en boucle ouverte u intervenant dans la définition 1.3.6 puisse être choisie dans U presque partout. Alors le système Σ est globalement asymptotiquement s-stabilisable dans le sens de la définition 3.2.3.

3.2.1.3 Grandes lignes de la preuve du théorème 3.2.1

Le théorème suivant est le point de départ de la construction proposée par Clarke et al. :

Théorème 3.2.2 (Sontag [1983]; Sontag et Sussmann [1995]). Le système (3.2.1) est asymptotiquement contrôlable si et seulement si il admet une fonction de Lyapounov V infinitésimalement strictement décroissante, c'est à dire :

- 1. V est définie positive et propre,
- 2. il existe $W: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tel que pour tout compact $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, il existe un compact $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^p$ tel que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{X}$:

$$\max_{\zeta \in \partial_P V(x)} \min_{u \in \mathbb{U}} \zeta f(x, u) \le -W(x)$$

où $\partial_P V(x)$ (appelée sousdifférentielle proximale) est l'ensemble des points $\zeta \in \mathbb{R}^n$ (appelés subgradients proximaux) pour lesquels il existe un voisinage \mathcal{V} de x et un nombre s > 0 tels que pour tout y dans \mathcal{V} :

$$V(y) \ge V(x) + \zeta^{T}(y - x) - s^{2} ||x - y||^{2}$$

Ce théorème signifie en fait qu'un système est asymptotiquement contrôlable si et seulement si il existe une fonction de Lyapounov que l'on peut faire décroître en jouant sur la commande. Ce résultat est une généralisation du théorème d'Artstein [Artstein, 1983]. La preuve est basée sur la construction d'une fonction W appropriée. V est alors le coût optimal du problème de minimisation $\min \int_0^\infty W(x(t))dt$. Quelques précautions doivent être prises afin d'assurer la continuité de V.

Dans le cas où V est différentiable, le théorème 3.2.2 donne le résultat classique suivant. Pour tout x, il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x,u) \le -W(x)$$

Il suffit alors théoriquement d'appliquer le retour d'état donné par :

$$k(x) := \underset{u \in \mathbb{U}}{\operatorname{argmin}} \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u)$$

Dans le cas présent, V est uniquement continue ; tout le problème consiste alors à adapter la démarche précédente.

Soit R > r > 0 deux rayons et $\mathcal{C}(R, r)$ la couronne de rayon intérieur r et de rayon extérieur R. Pour $\alpha > 0$, on définit :

$$V_{\alpha}(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left[V(y) + \frac{1}{2\alpha^2} \|y - x\|^2 \right]$$

 V_{α} est localement lipschitz et est une approximation de V dans la mesure où $\lim_{\alpha\to 0} V_{\alpha}(x) = V(x)$. On peut alors montrer qu'il existe m>0, $\alpha_0(R,r)>0$ et un compact \mathbb{U}_R tels que pour tout $0<\alpha\leq\alpha_0(R,r)$, pour tout $x\in\mathcal{C}(R,r)$ et pour tout $\zeta\in\delta_PV_{\alpha}(x)$:

$$\min_{u \in \mathbb{U}_R} \zeta f(x, u) \le -m$$

L'approximation V_{α} est une fonction de Lyapounov locale pour le système (3.2.1) que l'on peut faire décroître en appliquant la commande :

$$k_{\alpha}(x) := \underset{u \in \mathbb{U}_{R}}{\operatorname{argmin}} \zeta_{\alpha}(x) f(x, u)$$
(3.2.3)

Aux points de différentiabilité (c'est à dire presque partout d'après le théorème de Rademacher [1919]), $\zeta_{\alpha}(x) = \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x}(x)$. Ailleurs, $\zeta_{\alpha}(x)$ est choisi en utilisant des techniques d'analyse discontinue, que nous ne développerons pas ici.

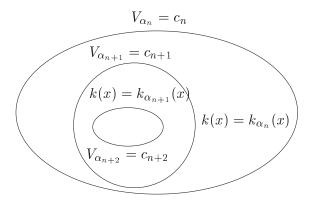


Figure 3.1 – $k(x) := k_{\alpha_n}(x)$ pour $x \in \{x; V_{\alpha_n}(x) \le c_n, V_{\alpha_n} > c_{n+1}\}$

Il reste alors à prouver que le retour d'état (3.2.3), construit sur la fonction V_{α} alors que la fonction de Lyapounov du système est V, stabilise malgré tout le système, avec éventuellement α suffisamment petit afin d'approximer V au mieux. En notant $G(R,\alpha):=\{x,\ V_{\alpha}(x)\leq \frac{1}{2}\min_{\|x\|\geq R}V(x)\}$ et en utilisant un développement en série de Taylor de V_{α} le long des π -trajectoires du système bouclé, on peut montrer que pour tout R>r>0, si on choisit α plus petit qu'une valeur limite $\alpha_0(R,r)>0$, il existe T(R,r)>0 et $\delta(r,R,\alpha)>0$ tels que pour toute partition π de diamètre inférieur à $\delta(r,R,\alpha)$ et pour tout $x_0\in G(R,\alpha)$, on a $x_{\pi}(t;x_0,k_{\alpha})\in G(R,\alpha)$ pour tout $t\geq 0$ et $x_{\pi}(t;x_0,k_{\alpha})\in \mathcal{B}(r)$ pour tout $t\geq T(R,r)$.

On peut alors "globaliser" ce résultat en définissant des boules concentriques de rayon $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et en définissant le retour d'état $k(x) := k_{\alpha_n}(x)$ pour $x \in \{x; \ V_{\alpha_n}(x) \le c_n, \ V_{\alpha_n} > c_{n+1}\}$ où $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ sont choisies telles que les $V_{\alpha_n} = c_n$ forment des courbes de niveaux sur \mathbb{R}^n comme le montre la figure 3.1. Le retour d'état ainsi obtenu stabilise le système au sens de la définition 3.2.3.

Remarque 3.2.1. On remarquera que, pour tout x dans la boule $\mathcal{B}(R)$, k(x) est dans \mathbb{U}_R qui est un compact dont le diamètre dépend de R. Or, pour tout $t \geq 0$, $x_{\pi}(t; x, k) \in \mathcal{B}(M(R))$; pour toute condition initiale $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \geq 0$, on a donc $k(x_{\pi}(t; x, k)) \in \mathbb{U}_{M(R)}$.

3.2.2 Contrôlabilité-stabilisabilité : un point de vue horizon fuyant

3.2.2.1 Réflexions préliminaires

Le problème de relation entre contrôlabilité asymptotique et stabilisabilité consiste en fait à faire le lien entre les trajectoires tendant asymptotiquement vers l'origine et l'existence d'un retour d'état, autrement dit entre boucle ouverte et boucle fermée. Afin de souligner ce lien, nous introduisons la notion suivante : Définition 3.2.4 (stratégie de commande). Nous appellerons stratégie de commande toute application u de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R}^p telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction u(x, .) appartienne à $\mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^p}$.

On peut alors reformuler, en terme de stratégie de commande, la contrôlabilité asymptotique de la manière suivante :

Définition 3.2.5. Le système (3.2.1) est globalement asymptotiquement contrôlable si il existe une stratégie de commande u telle que :

- 1. $(attractivit\acute{e}) \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \to \infty} x(t; x_0, u(x_0, .)) = 0$
- 2. (stabilité) $\forall R > 0$, $\exists r(R) > 0$ tel que $\forall x_0 \in \mathcal{B}(r(R))$, on a $x(t; x_0, u(x_0, .)) \in \mathcal{B}(R)$ pour tout $t \geq 0$.

Dans cette définition, la stratégie de commande u n'est pas supposée vérifier de condition de régularité par rapport à x_0 .

Le lien entre contrôlabilité et stabilisabilité asymptotique apparaît clairement avec l'écriture suivante de la stabilité asymptotique du système bouclé (3.2.1) (nous ne considérerons que l'énoncé global) :

Définition 3.2.6 (rappel de la définition 1.2.3). Le système (3.2.1) est asymptotiquement stabilisable par un retour d'état si il existe un retour d'état k tel que :

- 1. (existence) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(t; x_0, k)$ existe pour tout $t \geq 0$
- 2. $(attractivit\acute{e}) \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \to \infty} x(t; x_0, k) = 0$
- 3. (stabilité) $\forall R > 0$, $\exists r(R) > 0$ tel que $\forall x_0 \in \mathcal{B}(r(R))$, on a $x(t; x_0, k) \in \mathcal{B}(R)$ pour tout t > 0.

L'éclairage apporté par les commandes de type horizon fuyant est très intéressant pour appréhender ce problème. Nous laissons de côté l'aspect optimal généralement associé à la commande à horizon fuyant dans la mesure où, dans ce cas, il est nécessaire de faire des hypothèses fortes afin de garantir la stabilité asymptotique du système bouclé [Mayne et Michalska, 1990; Michalska et Mayne, 1991; Alamir et Bornard, 1994]. Le principe de l'horizon fuyant est le suivant : chercher une commande en boucle ouverte et l'appliquer pendant un temps τ . Au bout de ce temps τ , on recommence la recherche d'une commande en boucle ouverte pour l'appliquer à nouveau pendant le temps τ , et ainsi de suite... Si τ tend vers zéro, on tend vers le schéma temps-continu classique (cf. exemple 3.2.1); sinon, on se trouve dans le schéma continu-discret.

L'exemple suivant est là pour mettre en évidence le fait que la recherche d'une commande en boucle ouverte, telle que le système bouclé avec un processus de type horizon fuyant soit asymptotiquement stable, n'est pas a priori évidente. Le cas suivant est traité dans le schéma temps continu classique. La définition 3.2.5 signifie, en fait, qu'un système asymptotiquement contrôlable est un système pour lequel, il existe une stratégie de commande u, ramenant l'état du système asymptotiquement à l'origine, avec des excursions bornées. L'exemple 3.2.1 souligne que l'existence d'une telle stratégie de commande n'implique pas la stabilité du système bouclé avec un processus de type horizon fuyant exposé ci-dessus.

Exemple 3.2.1.

Reprenons le système proposé par Ryan [1994] et non stabilisable par un retour d'état continu :

$$\dot{x} = x + |x|u \tag{3.2.4}$$

Nous allons considérer deux stratégies de commande en boucle ouverte et observer les conséquences d'un bouclage en terme de stabilité.

1. Considérons tout d'abord la commande en boucle ouverte définie par (3.2.5). Dans le cas présent, u(x, .) est une fonction constante pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$(x_0, t) \to -2\operatorname{sign}(x_0)$$
(3.2.5)

Dans le cas d'une évolution du système sans perturbation, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la trajectoire en boucle ouverte est :

$$x(t; x_0, u(x_0, .)) = x_0 \exp(-t)$$

et donc u vérifie clairement les deux points de la définition de la contrôlabilité asymptotique 3.2.5, attractivité de l'origine et stabilité de la boucle ouverte. Si on boucle le système avec le retour d'état k(x) := u(x,0), le système bouclé devient :

$$\dot{x} = -x$$

et est donc clairement asymptotiquement stable.

2. Si nous considérons maintenant la commande en boucle ouverte (3.2.6).

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

 $(x_0, t) \to \operatorname{sign}(x_0) \left(\frac{1 - 2t - t^2}{(1 + t^2)(1 + t)} - 1 \right)$

$$(3.2.6)$$

Dans le cas d'une évolution du système sans perturbation, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la trajectoire en boucle ouverte est :

$$x(t; x_0, u(x_0, .)) = x_0 \frac{1+t}{1+t^2}$$

u vérifie également les deux points de la définition $3.2.5~\mathrm{dans}$ la mesure où :

- l'origine est bien attractive,
- pour tout R > 0, il existe $r := (2\sqrt{2} 2)R$ tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{B}(r)$, on ait $x(t; x_0, u(x_0, .)) \in \mathcal{B}(R)$.

Pourtant, si on boucle le système avec le retour d'état k(x) := u(x, 0) = 0, le système bouclé devient :

$$\dot{x} = x$$

et est donc clairement non asymptotiquement stable.

D'un point de vue théorique, deux problèmes bien distincts se posent :

- Est-il possible d'effectuer un choix sur les commandes en boucle ouverte afin de garantir la stabilité de la boucle fermée?
- Est-il toujours possible de se placer dans le schéma temps-continu?

Notre objectif a été de répondre à ces questions. Comme dans le travail de Clarke et al. [1997], la réponse à la seconde question sera négative. En effet, une application infinitésimale de la commande en boucle ouverte, peut ne pas être mathématiquement fondée car la notion même de solution d'équation différentielle peut alors perdre son sens. Par contre, comme nous allons le montrer, pour toute borne inférieure $\delta>0$ quelconque, il existe un retour d'état qui stabilise le système pour tout échantillonnage plus lent que δ . Il est donc en pratique possible d'échantillonner aussi vite que l'on veut, en se fixant δ suffisamment petit.

L'approche proposée par Clarke et al. [1997] et présentée ci-dessus masque cet aspect des choses dans la mesure où l'approche adoptée est de type Lyapounov. C'est sur la décroissance d'une fonction de Lyapounov qu'est construit le retour d'état et non pas en essayant, à partir de la boucle ouverte, de re-boucler le système. C'est cette approche que nous nous proposons de suivre.

3.2.2.2 Énoncé du résultat

Avant d'énoncer le résultats, nous commencerons par quelques définitions afin de préciser quel type de stabilisation nous avons obtenu. Rappelons tout d'abord que nous nous intéressons aux systèmes de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.2.7}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ et f est continue et localement lipschitz en x uniformément par rapport à u. Sous ces hypothèses, pour toute condition initiale x_0 à t_0 et toute commande en boucle ouverte dans $\mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^p}$, la solution de (3.2.7) existe et est unique sur un intervalle $[t_0, t_f[(t_f \neq t_0) \text{ [Filippov, 1988, théorème 2].}]$

On étend la définition 3.2.2 de la π -trajectoire par :

Définition 3.2.7 (π -trajectoire). La π -trajectoire associée à une stratégie de commande K et à une partition π d'un système de la forme (3.2.7) est la fonction du temps obtenue en résolvant successivement pour chaque i:

$$\dot{x} = f(x, K(x(t_i), t)) \quad pour \ t \in [0, t_{i+1} - t_i]$$
(3.2.8)

en utilisant la valeur finale sur l'intervalle précédent de l'état comme initialisation pour l'intervalle suivant. On la notera également $x_{\pi}(.;x_0,K)$.

Remarques 3.2.1. – Cette dernière définition englobe la définition 3.2.2 en prenant K indépendant de t.

– Ce schéma consistant, à chaque instant de la partition t_i , à appliquer une commande en boucle ouverte jusqu'à l'instant suivant t_{i+1} , est celui de l'horizon fuyant. Il est clair que se posent les mêmes problèmes dans le cas où une perturbation interviendrait entre les instants d'échantillonnage.

Nous définissons:

Définition 3.2.8. Le système (3.2.7) sera dit globalement **asymptotiquement** cdstabilisable si pour tout $\delta > 0$, il existe un retour d'état $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^p$ tel que :

- 1. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $K(x,.) \in \mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^p}$,
- 2. pour tout couple R > r > 0, il existe M(R) > 0 et T(R, r) > 0 tels que pour toute partition π , telle que $\underline{d}(\pi) \geq \delta$, on ait :
 - (a) (trajectoire bornée) $\forall x_0 \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq 0, \quad x_{\pi}(t; x_0, K) \in \mathcal{B}(M(R)),$
 - (b) (attractivité) $\forall x_0 \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq T(R,r), \quad x_{\pi}(t; x_0, K) \in \mathcal{B}(r),$
 - (c) $(stabilit\acute{e}) \lim_{R\to 0} M(R) = 0.$

On remarquera que l'existence et l'unicité de la π -trajectoire découlent de l'existence et de l'unicité de la trajectoire sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ [Filippov, 1988, théorème 2]. Il est donc inutile d'émettre une condition d'existence de celle-ci dans l'énoncé de la stabilité de la boucle fermée.

Dans notre schéma, il n'est pas nécessaire de faire tendre le diamètre de la partition vers zéro pour avoir l'attractivité de l'origine. Aussi parlons nous de cd-stabilité asymptotique. Le préfixe "cd" signifie "continu-discret". En effet, pour une partition $\pi:=(kT)_{k\in\mathbb{N}}$ (T>0), le schéma est en fait le schéma classique rencontré en continu discret à savoir, quand le retour d'état est défini à partir de la mesure de l'état aux instants kT. Comme nous l'avions préalablement expliqué en introduction, le diamètre de la partition peut être choisi aussi petit que l'on veut. Il ne peut cependant être pris nul pour retomber dans un schéma temps continu classique : comme dans le travail de Clarke et al. [1997], le retour d'état perd alors son sens.

Notre objectif est alors d'établir l'équivalence entre la contrôlabilité asymptotique et l'existence de K. L'existence même de K n'est pas évidente car il doit être indépendant de la partition π (dans la mesure où celle-ci vérifie $\underline{d}(\pi) \geq \delta$) et être valable pour tout x. L'exemple 3.2.1 précédent, montre bien, dans le cas temps continu, que l'existence d'une stratégie de commande stabilisante u n'implique même pas que les trajectoires $x_{\pi}(.; x, u(x, .))$ soient attractives.

Notre résultat est alors le suivant :

Théorème 3.2.3. Soit un système Σ globalement asymptotiquement contrôlable dans le sens de la définition 1.3.8. Supposons de plus qu'il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{V}(0) \subset \mathbb{R}^n$ et un compact $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$, tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}(0)$, la commande en boucle ouverte u intervenant dans la définition 1.3.8 puisse être choisie dans \mathcal{U} presque partout. Alors le système Σ est globalement asymptotiquement cd-stabilisable dans le sens de la définition 3.2.8.

On soulignera que l'on obtient une équivalence entre contrôlabilité asymptotique et cd-stabilisabilité dès lors que l'on suppose qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une commande qui tende vers l'infini pour ramener l'état à l'origine.

3.2.2.3 Relation avec le travail de Clarke et spécificité de l'approche

Les hypothèses retenues dans notre travail sont identiques à celles posées par Clarke et al. [1997].

Notre résultat présente l'avantage de garantir l'attractivité de l'origine **indépendamment** de la fréquence de l'échantillonnage dans la limite où celle-ci n'est pas trop rapide. Cela correspond plus aux schémas classiques de l'échantillonnage pour lesquels il n'est pas réaliste :

- de devoir modifier la période d'échantillonnage en fonction des objectifs que l'on se fixe (dans le travail de Clarke et al. [1997] $\bar{d}(\pi)$ dépend de R et r),
- d'augmenter sans limite la fréquence d'échantillonnage pour des états au voisinage de l'origine.

Le théorème 3.2.1 ne peut en fait garantir qu'une stabilisation pratique.

Notre approche, de type horizon fuyant, a sa propre spécificité, et diffère fortement de celle utilisée par Clarke et al. [1997] (basée sur les fonctions de Lyapounov). Elle permet, notamment, de mettre en évidence un résultat typique à l'horizon fuyant, à savoir que pour tout système asymptotiquement contrôlable, on peut définir un coût de type horizon infini (cf. théorème 3.2.4).

3.2.2.4 Preuve du théorème 3.2.3 : (CDSAG) entraîne (CAG)

Nous commencerons par établir que la CD-Stabilisabilité Asymptotique Globale (CD-SAG) entraîne la Contrôlabilité Asymptotique Globale (CAG). Cette implication est assez immédiat.

Soit u le retour d'état asymptotiquement cd-stabilisant et la partition $\pi := (k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit la commande en boucle ouverte v_{x_0} par :

$$v_{x_0}$$
 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p
$$t \rightarrow u(x_{\pi}(E(t); x_0, u), t - E(t))$$

où E(t) désigne la partie entière de t. On obtient alors directement la CAG du système.

3.2.2.5 Preuve du théorème 3.2.3 : (CAG) entraîne (CDSAG)

L'implication (CAG) entraîne (CDSAG) est évidemment le plus délicate. Nous ne nous intéresserons qu'au cas global. Bien évidemment, les résultats établis ici resteront valables dans le cas local.

a. Définitions préliminaires

Le système (3.2.1) est supposé asymptotiquement contrôlable. De plus par hypothèse, pour tout compact \mathbb{X} de \mathbb{R}^n , u peut être choisie dans un compact \mathbb{U} (ne dépendant que de \mathbb{X}) de \mathbb{R}^p pour presque tout t. On définit :

Définition 3.2.9 (stratégie stabilisante). Toute stratégie de commande v vérifiant les points suivants sera appelée **stratégie de commande stabilisante** : pour tout couple R > r > 0, il existe M(R) > 0 et T(R, r) > 0 tels que :

- 1. (stabilité) $\lim_{R\to 0} M(R) = 0$,
- 2. (trajectoire bornée) $\forall x \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq 0, \quad x(t; x, v(x, .)) \in \mathcal{B}(M(R)),$
- 3. (attractivité) $\forall x \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq T(R,r), \quad x(t;x,v(x,.)) \in \mathcal{B}(r).$

Définition 3.2.10 (stratégie stabilisante bornée). Toute stratégie de commande stabilisante v vérifiant en plus le point suivant sera appelée stratégie de commande stabilisante bornée

4. (commande bornée) Pour tout compact $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{X}$, v(x, .) est dans un compact $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^p$ presque partout.

La suite se décompose en trois parties principales :

- 1. Dans la première nous montrerons qu'il existe une stratégie de commande stabilisante bornée autorisant la définition d'une fonction coût similaire à celle utilisée dans la commande à horizon glissant infini (lemme 3.2.4).
- 2. Nous construirons ensuite un retour d'état faisant décroître, pour toute partition π telle que $\underline{d}(\pi) \geq \delta > 0$, la fonction coût précédente, à chaque instant t_i de la partition.
- 3. Enfin, nous montrerons que ce retour d'état cd-stabilise le système, obtenant ainsi le théorème 3.2.3.

b. Définition d'un coût

Nous allons ici montrer que:

Lemme 3.2.4. Si le système (3.2.1) est asymptotiquement contrôlable et que pour tout compact $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ il existe un compact \mathbb{U} tel que pour tout $x \in \mathbb{X}$, u(x,t) puisse être prise dans \mathbb{U} presque partout, alors il existe une stratégie de commande stabilisante bornée v et une fonction $G: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe \mathcal{C}^1 telle que :

- 1. G et sa dérivée g sont de classe ${\cal K}$,
- 2. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'intégrale W(x, v(x, .)) suivante converge

$$W(x, v(x, .)) := \int_0^{+\infty} G(\|x(\tau; x, v(x, .))\|) d\tau$$
 (3.2.9)

et, pour tout R > 0, il existe une fonction décroissante $\Lambda_R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que :

- 3. $si R_1 \ge R_2 \ge 0$, on $a \Lambda_{R_1}(0) \ge \Lambda_{R_2}(0)$,
- 4. $\lim_{R\to 0} \Lambda_R(0) = 0$,
- 5. pour tout $x \in \mathcal{B}(R)$ et tout $t \geq 0$, $||x(t; x, v(x, .))|| \leq \Lambda_R(t)$,
- 6. l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(\Lambda_R(\tau))d\tau$ converge.

On remarque aisément que les points (5) et (6) impliquent le point (2). W(x, v(x, .)) est le coût associé à l'état initial x et à la commande en boucle ouverte v(x, .). Le coût (3.2.9) est sous une forme classique en horizon fuyant lorsque seul un objectif de commande est posé (pas de coût associé à la commande).

La preuve se déroule en quatre points de la manière suivante :

- 1. Dans un premier temps, nous allons établir que le système (3.2.1) admet une stratégie de commande stabilisante bornée v à partir du moment où il est asymptotiquement contrôlable.
- 2. Ceci nous permettra, pour tout R > 0, de définir une fonction "gabarit" Λ_R , vérifiant les points (3), (4) et (5) du lemme 3.2.4.
- 3. Ensuite, en fixant R=R, le lemme de Massera [1949, lemme 12] nous donnera une fonction G, vérifiant le point (1) du lemme 3.2.4. et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(\Lambda_{\bar{R}}(\tau))d\tau$ converge.
- 4. Pour conclure, nous vérifierons que, pour tout R, l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(\Lambda_R(\tau))d\tau$ est effectivement convergente.

Cette preuve est développée en annexe A page 127.

c. Formulation du retour d'état stabilisant

Soit v, une stratégie de commande stabilisante bornée vérifiant le lemme 3.2.4 et C>0 une constante. On définit un découpage de \mathbb{R}^n en boules concentriques $\mathcal{B}(\frac{C}{2^k})$, $k\in\mathbb{Z}$. Par définition d'une stratégie de commande stabilisante bornée, il existe, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, un compact $\mathbb{U}_{\frac{C}{2^k}}$ tel que pour tout $x\in\mathcal{B}(\frac{C}{2^k})$, v(x,t) soit dans $\mathbb{U}_{\frac{C}{2^k}}$ pour presque tout $t\geq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on appelle :

- n_x , le plus grand entier relatif n pour lequel $x \in \mathcal{B}(\frac{C}{2^n})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, d'après le lemme 3.2.4, on a :

$$\forall t \ge 0, \qquad \|x(t; x, v(x, .))\| \le \Lambda_{\frac{C}{2^n x}}(t)$$

avec de plus, v(x,t) dans $\mathbb{U}_{\frac{C}{2^nx}}$ pour presque tout $t \geq 0$.

 $-\bar{n}_x$, le plus grand entier relatif pour lequel il existe une commande en boucle ouverte u(.) telle que :

$$\begin{cases} u(t) \in \mathbb{U}_{\frac{C}{2^{n}x}} \text{ presque partout} \\ \forall t \geq 0, \quad ||x(t; x, u)|| \leq \Lambda_{\frac{C}{2^{n}x}}(t) \end{cases}$$
 (3.2.10)

Il est clair, d'après le point précédent, que :

$$\bar{n}_x \ge n_x \tag{3.2.11}$$

On remarquera également que, sur toute trajectoire en boucle ouverte x(.;x,u), on a, pour tout $t \ge 0$:

$$\bar{n}_{x(t:x,u)} \ge \bar{n}_x \tag{3.2.12}$$

car u(.+t) est une commande en boucle ouverte dans $\mathbb{U}_{\frac{C}{2^n x}}$ telle que, pour tout $t' \geq 0$, on ait :

$$||x(t';x(t;x,u),u(.+t))|| = ||x(t'+t;x,u)||$$

$$\leq \Lambda_{\frac{C}{2^{n}x}}(t'+t)$$

$$\leq \Lambda_{\frac{C}{2^{n}x}}(t') \operatorname{car} \Lambda_{\frac{C}{2^{n}x}} \operatorname{est d\'{e}croissante}$$

 $-U_x \subset \mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^p}$, l'ensemble des commandes en boucle ouverte u vérifiant les conditions (3.2.10). On notera que, par définition de \bar{n}_x , U_x n'est pas vide. On définit enfin:

$$W(x) := \inf \{ W(x, u); \ u \in U_x \}$$
(3.2.13)

W(x) est le coût minimum associé à x.

Lemme 3.2.5. Avec les notations précédentes, pour tout $\delta > 0$, il existe une fonction $\varepsilon_{\delta}(x)$ définie (i.e. $\varepsilon_{\delta}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$), telle tout retour d'état de la forme :

$$K(x,t) := u(t)$$
 avec $u \in V_x := \{ u \in U_x; \ W(x,u) \le W(x) + \varepsilon_{\delta}(x) \}$ (3.2.14)

cd-stabilise (3.2.1) au sens de la définition 3.2.8.

La preuve de ce dernier lemme achève la preuve du théorème 3.2.3.

d. Preuve du lemme 3.2.5

Avant tout, remarquons que la définition de U_x et l'équation (3.2.12) nous donnent le long des π -trajectoires :

$$\forall t \ge 0, \qquad \bar{n}_{x_{\pi}(t;x,K)} \ge \bar{n}_x \tag{3.2.15}$$

Les points 1. et 2.(a) et 2.(c) de la définition 3.2.8 sont assez immédiats à vérifier :

- 1. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $K(x, .) = u(.) \in V_x \subset U_x \subset \mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^p}$.
- 2. Pour toute partition $\pi=(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, la π -trajectoire du système (3.2.7) associée au retour d'état K vérifie :
 - (a) pour tout R > 0, tout $x \in \mathcal{B}(R)$ et tout $t \ge 0$:

$$x_{\pi}(t; x, K) \in \underset{(3.2.15)}{\in} \mathcal{B}\left(\sup_{t \in \mathbb{R}^{+}} \Lambda_{\frac{C}{2^{n}x}}(t)\right)$$

$$\in \mathcal{B}\left(\Lambda_{\frac{C}{2^{n}x}}(0)\right) \operatorname{car} \Lambda_{\frac{C}{2^{n}x}} \text{ est décroissante}$$

$$\in \underset{\text{et } (3.2.11)}{\in} \mathcal{B}\left(\Lambda_{\frac{C}{2^{n}x}}(0)\right)$$

En notant $n_R := \inf_{x \in \mathcal{B}(R)} n_x$, on a donc :

$$x_{\pi}(t; x, K) \in \mathcal{B}\left(\Lambda_{\frac{C}{2^{n_{R}}}}(0)\right) \tag{3.2.16}$$

¹Il n'existe pas nécessairement de commande $u\in\mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^{p}}$ telle que W(x,u)=W(x).

(c) Le lemme 3.2.4.(4) nous indique que :

$$\lim_{R \to 0} \Lambda_{\frac{C}{2^{n_R}}}(0) = 0$$

Il reste donc, pour conclure, à établir le point 2.(b) de la définition 3.2.8.

Soit deux rayons R > r > 0, l'état initial $x \in \mathcal{D}(r,R)$ du système et l'état $x_{\pi}(t_i; x, K)$ du système à l'instant t_i de la partition avec le retour d'état K défini par (3.2.14). L'objectif est donc d'établir qu'il existe un temps T(r,R) tel que, pour toute partition π de diamètre inférieur $\underline{d}(\pi) \geq \delta$ et tout $x \in \mathcal{D}(r,R)$, on a $x_{\pi}(t;x,K) \in \mathcal{B}(r)$, pour tout $t \geq T(r,R)$.

La preuve de ce dernier point se déroule en trois étapes :

- 1. Nous montrons d'abord que pour tout R > r > 0, il existe un entier $N_1(r,R)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, toute partition π , telle que $\underline{d}(\pi) \geq \delta$, et tout instant t_i de la partition tel que $x_{\pi}(t_i; x, K) \in \mathcal{D}(r, R)$, on a $\bar{n}_{x_{\pi}(t_i+N_1(r,R);x,K)} > \bar{n}_{x_{\pi}(t_i;x,K)}$. En d'autres termes, $\bar{n}_{x_{\pi}(t_i;x,K)}$ incrémente de un, au pire des cas, tous les $N_1(r,R)$ pas d'échantillonnage.
 - Ce point est la conséquence du choix que nous allons faire de ε_{δ} . Celui-ci garantira la décroissance du coût W à chaque instant t_i , impliquant la décroissance de $||x_{\pi}(t_i; x, K)||$ et par conséquent, au bout d'un certain nombre de pas, la croissance de $\bar{n}_{x_{\pi}(t_i; x, K)}$.
- 2. Nous déduirons, assez directement, que pour tout R > r > 0, il existe un entier N(r,R) tel que, pour toute partition π de diamètre inférieur $\underline{d}(\pi) \geq \delta$ et tout $x \in \mathcal{D}(r,R)$, on a $x_{\pi}(t;x,K) \in \mathcal{B}(r)$, pour tout $t \geq t_{N(r,R)}$. Ce point est proche de notre objectif, à la différence suivante près : autant N(r,R)
- 3. Dans un dernier temps, nous montrerons donc l'existence d'un temps T(r,R), indépendant des partitions.

est indépendant de la partition, autant ce n'est pas le cas de l'instant $t_{N(r,R)}$.

Ce dernier point est la conséquence du choix des commandes en boucle ouverte dans V_x dont les trajectoires correspondantes sont toutes dans le gabarit $\Lambda_R(t)$. Si l'écart entre deux instants t_i et t_{i+1} d'une partition devient trop grand, la trajectoire rentrera "en boucle ouverte" dans la boule $\mathcal{B}(r)$. On peut ainsi déduire qu'il existe un temps T(r,R) pour lequel, même si $t_{N(r,R)} \geq T(r,R)$, la trajectoire aura rejoint la boule $\mathcal{B}(r)$.

Les principales notations utilisées ici sont récapitulées en annexe B.

Existence de $N_1(r,R)$:

Soit un réel $\delta > 0$ fixé et Γ , la primitive de G s'annulant à l'origine :

$$\Gamma(t) := \int_0^t G(\tau)d\tau \tag{3.2.17}$$

Conformément à l'équation (3.2.15), pour toute partition π , on a le long des π -trajectoires : $\bar{n}_{x_{\pi}(t_{i+1};x,K)} \geq \bar{n}_{x_{\pi}(t_{i};x,K)}$. Pour plus de concision, notons $x_{i} := x_{\pi}(t_{i};x,K)$, l'état du système à l'instant t_{i} . L'état x_{i+1} , à l'instant t_{i+1} , est obtenu en intégrant (3.2.1) entre t_{i} et t_{i+1} avec pour commande $K(x_{i},t) = u_{i}(t)$, où u_{i} , de par le choix (3.2.14), est telle que :

$$W(x_i) \le W(x_i, u_i) \le W(x_i) + \varepsilon_{\delta}(x_i)$$

Or, si $\bar{n}_{x_{i+1}} = \bar{n}_{x_i}$, la commande $u_i(.-(t_{i+1}-t_i))$ est également dans $U_{x_{i+1}}$, entraînant :

$$W(x_{i+1}) \leq W(x_{i+1}, u_i(. - (t_{i+1} - t_i)))$$

$$\leq W(x_i, u_i) - \int_0^{t_{i+1} - t_i} G(\|x(\tau; x_i, u_i)\|) d\tau$$

$$\leq W(x_i) + \varepsilon_{\delta}(x_i) - \int_0^{t_{i+1} - t_i} G(\|x(\tau; x_i, u_i)\|) d\tau$$
(3.2.18)

or:

$$\int_{0}^{t_{i+1}-t_{i}} G(\|x(\tau;x_{i},u_{i})\|)d\tau \ge \int_{0}^{\delta} G(\|x(\tau;x_{i},u_{i})\|)d\tau \tag{3.2.19}$$

en définissant :

$$\forall \rho > 0, \qquad S(\rho) := \max(\sup_{\substack{x \in \mathcal{B}(\Lambda_{\rho}(0)) \\ u \in \mathbb{U}_{\rho}}} \|f(x, u)\|, 1)$$
(3.2.20)

 $S(\frac{C}{2\bar{n}x})$ est une majoration de la dérivée par rapport au temps de la trajectoire x(.;x,u), dès lors que $u \in U_x$. En utilisant cette majoration dans l'inégalité (3.2.19), on obtient :

$$\int_{0}^{t_{i+1}-t_{i}} G(\|x(\tau;x_{i},u_{i})\|) d\tau \ge \int_{0}^{\min\left(\frac{\|x_{i}\|}{S\left(\frac{C}{2^{\tilde{n}}x_{i}}\right)},\delta\right)} G\left(\|x_{i}\| - S\left(\frac{C}{2^{\tilde{n}}x_{i}}\right)\tau\right) d\tau$$

$$\ge \frac{1}{S\left(\frac{C}{2^{\tilde{n}}x_{i}}\right)} \left[\Gamma(\|x_{i}\|) - \Gamma\left(\|x_{i}\| - S\left(\frac{C}{2^{\tilde{n}}x_{i}}\right)\min\left(\frac{\|x_{i}\|}{S\left(\frac{C}{2^{\tilde{n}}x_{i}}\right)},\delta\right)\right)\right] (3.2.21)$$

le "min" provenant du fait que si $\frac{\|x_i\|}{S(\frac{C}{2^n x_i})} \leq \delta$, la fonction $\|x_i\| - S(\frac{C}{2^{n_{x_i}}})\tau$ s'annule avant que τ ne vaille δ . En combinant les inégalités (3.2.18) et (3.2.21), on obtient :

$$W(x_{i+1}) - W(x_i) \le \varepsilon_{\delta}(x_i) - \frac{1}{S(\frac{C}{2^{n_{x_i}}})} \left[\Gamma(\|x_i\|) - \Gamma\left(\|x_i\| - S\left(\frac{C}{2^{n_{x_i}}}\right) \min\left(\frac{\|x_i\|}{S\left(\frac{C}{2^{n_{x_i}}}\right)}, \delta\right) \right) \right]$$

L'objectif est donc de choisir ε_{δ} de sorte que le membre de droite de cette dernière inégalité soit strictement négatif. Si on choisit :

$$\varepsilon(x_i) := \min\left(\frac{1}{S(\frac{C}{2^{\frac{n}{x}}})}, \frac{\delta}{\|x\|}\right) \frac{\Gamma(\|x\|)}{2}$$
(3.2.22)

Avec ce choix :
 - si
$$\frac{\|x_i\|}{S(\frac{C}{2^n x_i})} \le \delta$$
, on a :

$$W(x_{i+1}) - W(x_i) \leq \varepsilon_{\delta}(x_i) - \frac{1}{S(\frac{C}{2^{n_{x_i}}})} \Gamma(\|x_i\|)$$

$$\leq -\varepsilon_{\delta}(x_i) \qquad (3.2.23)$$

– Si
$$\frac{\|x_i\|}{S(\frac{C}{2^{n_{x_i}}})} > \delta$$
, on a:

$$W(x_{i+1}) - W(x_{i}) \leq \varepsilon_{\delta}(x_{i}) - \frac{1}{S\left(\frac{C}{2^{n}x_{i}}\right)} \left[\Gamma(\|x_{i}\|) - \Gamma\left(\|x_{i}\| - \delta S\left(\frac{C}{2^{n}x_{i}}\right)\right) \right]$$

$$\leq \frac{\delta\Gamma(\|x_{i}\|)}{2\|x_{i}\|} - \frac{1}{S\left(\frac{C}{2^{n}x_{i}}\right)} \left[\Gamma(\|x_{i}\|) - \Gamma\left(\|x_{i}\| - \delta S\left(\frac{C}{2^{n}x_{i}}\right)\right) \right]$$

$$\leq -\frac{\delta\Gamma(\|x_{i}\|)}{2\|x_{i}\|} - \frac{1}{S\left(\frac{C}{2^{n}x_{i}}\right)} \left[\left(1 - \frac{\delta S\left(\frac{C}{2^{n}x_{i}}\right)}{\|x\|}\right) \Gamma(\|x_{i}\|) - \Gamma\left(\|x_{i}\| - \delta S\left(\frac{C}{2^{n}x_{i}}\right)\right) \right]$$

Comme $0 < \frac{\delta S(\frac{C}{2^n x_i})}{\|x_i\|} < 1$ et que, G étant croissante, sa primitive Γ est convexe, on sait que :

$$\left(1 - \frac{\delta S\left(\frac{C}{2^{\bar{n}}x_i}\right)}{\|x_i\|}\right) \Gamma(\|x_i\|) \ge \Gamma\left(\|x_i\| - \delta S\left(\frac{C}{2^{\bar{n}}x_i}\right)\right)$$

ce qui, dans l'inégalité précédente, donne :

$$W(x_{i+1}) - W(x_i) \leq -\varepsilon_{\delta}(x_i) \tag{3.2.24}$$

Dans les deux cas (3.2.23) et (3.2.24), on a $W(x_{i+1}) - W(x_i) \le -\varepsilon_{\delta}(x_i)$.

De plus, si on note pour R > r > 0:

$$\underline{\varepsilon}_{\delta}(r,R) := \inf_{x \in \mathcal{D}(r,R)} \varepsilon_{\delta}(x)$$

on peut montrer que $\underline{\varepsilon}_{\delta}(r,R) > 0$. En effet, par définition de S, donnée par l'équation (3.2.20), on a nécessairement $S(\frac{C}{2^{\overline{n}_x}}) \leq S(\frac{C}{2^{n_x}}) \leq S(\frac{C}{2^{n_R}})$, avec, rappelons le, $n_R := \inf_{x \in \mathcal{B}(R)} n_x$. Par conséquent, en utilisant la définition de ε_{δ} , on a :

$$\varepsilon_{\delta}(x) = \min\left(\frac{1}{S(\frac{C}{2^{n_x}})}, \frac{\delta}{\|x\|}\right) \frac{\Gamma(\|x\|)}{2} \ge \min\left(\frac{1}{S(\frac{C}{2^{n_R}})}, \frac{\delta}{\|x\|}\right) \frac{\Gamma(\|x\|)}{2}$$
(3.2.25)

et comme le membre de droite de l'inégalité (3.2.25) est continu en x, on a bien $\underline{\varepsilon}_{\delta}(r,R) > 0$, pour tout $R \geq r > 0$.

Remarque 3.2.2. δ peut être choisi aussi petit que l'on veut, cependant, il ne peut pas être nul. En effet, outre les éventuels problèmes de définition d'une solution, on ne pourrait plus dans ces conditions garantir que $\underline{\varepsilon}_{\delta}(r,R) > 0$. Or, comme nous allons le voir, c'est ce point précis qui assure convergence de l'état vers l'origine.

Les deux points ci-dessous sont illustrés par la figure 3.2 et nous permettent de définir $N_1(r,R)$:

– D'après le lemme 3.2.4, toute trajectoire issue de la boule $\mathcal{B}(R)$ reste dans la boule $\mathcal{B}(\Lambda_R(t))$. En particulier, on a :

$$x \in \mathcal{D}(r,R) \Rightarrow W(x) \le \int_0^{+\infty} G(\Lambda_R(\tau))d\tau$$
 (3.2.26)

– Comme la dérivée de la trajectoire peut être bornée sur tout compact (équation (3.2.20)), si x appartient au disque $\mathcal{D}(r,R)$, le coût W(x) est nécessairement plus grand qu'un coût minimum $W_{min}(r)$ qui correspond à la décroissance la plus rapide possible de l'état vers l'origine. Cela donne :

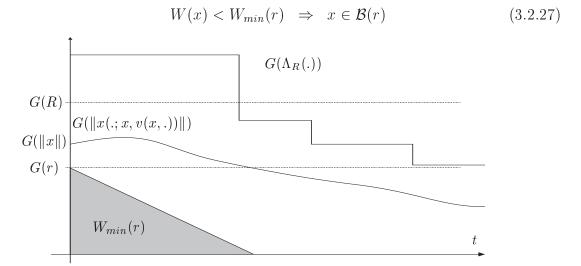


Figure 3.2 – Majoration et minoration de
$$W(x)$$
 pour $x \in \mathcal{D}(r,R)$

Par conséquent, en choisissant $N_1(r,R)$ comme le plus petit entier tel que :

$$N_1(r,R) > \frac{1}{\underline{\varepsilon}(r,R)} \left(\int_0^{+\infty} G(\Lambda_R(\tau)) d\tau - W_{min}(r) \right)$$
 (3.2.28)

on peut garantir, achevant ainsi la preuve de la première étape, que, pour tout $x \in \mathcal{D}(r, R)$, on a :

$$\bar{n}_{x_{\pi}(t_{i+N_{1}(r,R)};x,K)} > \bar{n}_{x_{\pi}(t_{i};x,K)}$$
 (3.2.29)

Existence de N(r,R):

La figure 3.3 illustre les différentes boules considérées ici.

L'existence de N découle directement de N_1 . En effet, définissons :

$$m(r) := \inf \left\{ m \in \mathbb{Z}; \ \mathcal{B}\left(M\left(\frac{C}{2^m}\right)\right) \subset \mathcal{B}(r) \right\}$$
 (3.2.30)

De par sa définition et par l'équation (3.2.16), m(r) est le plus petit entier tel que, pour tout x dans la boule $\mathcal{B}(\frac{C}{m(r)})$, la trajectoire $x_{\pi}(.;x,K)$ reste dans la boule $\mathcal{B}(r)$.

En utilisant cette définition et le fait que, pour tout $x \in \mathcal{D}(r, R)$, on a $n_x \geq n_R$, il suffit, d'après le point précédent, de choisir pour tout R > r > 0:

$$N(r,R) := N_1\left(\frac{C}{2^{m(r)}},R\right)(m(r) - n_R)$$

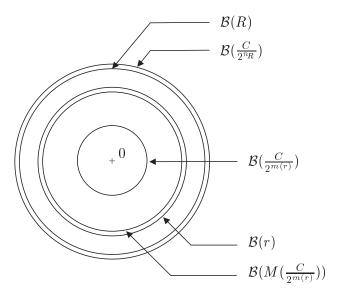


Figure 3.3 – Illustration des boules $\mathcal{B}(R)$, $\mathcal{B}(r)$, $\mathcal{B}(M(\frac{C}{2^{m(r)}}))$, $\mathcal{B}(\frac{C}{2^{m(r)}})$ et $\mathcal{B}(\frac{C}{2^{n_R}})$.

pour pouvoir garantir que, pour toute partition π de diamètre inférieur $\underline{d}(\pi) \geq \delta$, tout $x \in \mathcal{D}(r,R)$ et tout $i \geq N(r,R)$, on a $\bar{n}_{x_{\pi}(t_i;x,K)} < m(r)$. Par conséquent, pour tout $i \geq N(r,R)$, $x_{\pi}(t_i;x,K) \in \mathcal{B}(\frac{C}{m(r)})$, ce qui implique que pour tout $t \geq t_{N(r,R)}$, $x_{\pi}(t;x,K) \in \mathcal{B}(M(\frac{C}{m(r)})) \subset \mathcal{B}(r)$. Ce dernier point n'est autre que l'objectif que nous nous étions fixés dans ce paragraphe.

Existence de T(r,R):

Il nous reste donc à montrer que T(r,R) peut être choisi indépendant de la partition.

A chacun des instants d'échantillonnage $(t_i)_{i\in[0,N(r,R)]}$, conformément à l'équation (3.2.14), la commande u à appliquer est choisie dans l'ensemble $V_{x_{\pi}(t_i;x,K)} \subset U_{x_{\pi}(t_i;x,K)}$. Or, par l'équation (3.2.12), pour toute partition π , on a $U_{x_{\pi}(t_i;x,K)} \subset U_x$. Il en découle que $u \in U_x$, et donc par la relation (3.2.10) : $x(t;x,u) \in \mathcal{B}(\Lambda_R(t))$. Par conséquent, si l'écart entre l'instant d'échantillonnage t_i et le suivant t_{i+1} est trop important, la trajectoire rejoint, "en boucle ouverte", la boule $\mathcal{B}(m(r))$ au bout d'un temps $T_{max}(r,R)$ ne dépendant que de r et R (et donc pas de la partition). On peut alors conclure en prenant :

$$T(r,R) := N(r,R)T_{max}(r,R)$$

Ainsi, pour toute partition π de diamètre inférieur $\underline{d}(\pi) \geq \delta$ et tout $x \in \mathcal{D}(r, R)$, on a $x_{\pi}(t; x, K) \in \mathcal{B}(r)$, pour tout $t \geq T(r, R)$.

Ce dernier point termine la preuve. Le retour d'état proposé au lemme 3.2.5, cd-stabilise le système (3.2.1) au sens de la définition 3.2.8 et on a établi que (CAG) entraîne (CDSAG).

3.2.3 Conclusion et pistes de réflexion

Nous avons donc établi dans ce paragraphe, qu'un système asymptotiquement contrôlable est également asymptotiquement cd-stabilisable par un retour d'état dès lors que l'on pose l'hypothèse technique qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser une commande infinie pour ramener, en boucle ouverte, les états à l'origine. Partant des mêmes hypothèses que celles utilisées par Clarke et al. [1997], notre approche apporte un élément nouveau au sujet dans le sens où, si on se place dans un schéma échantillonné classique (période fixe), cette période ne dépend pas, dans notre schéma, des objectifs. On aboutit, par conséquent, à une stabilisation asymptotique et non pratique comme dans le travail Clarke et al. [1997].

L'étude de la robustesse du retour d'état proposé serait, de par la complexité de sa définition, un travail en soi. Cependant, la continuité du champ f apporte quelques pistes de réflexion : il est, en effet, raisonnable de penser que si x' est proche de x, il existera deux commandes u_x et $u_{x'}$ proches (au sens de la distance sup) telles que les coûts associés W(x) et W(x') soient également proches l'un de l'autre. Il en résulte que la stabilité obtenue est, selon toute vraisemblance, une propriété ouverte : il existe une fonction ρ de classe $\mathcal K$ telle que le système :

$$\dot{x} \in f(x, u) + \mathcal{B}(\rho(x)) \tag{3.2.31}$$

reste stable sous le retour d'état (3.2.14). Ce dernier point, vérifié dans le travail de Clarke et al. [1997], reste à expliciter formellement. Si une telle propriété est vérifiée, il existe ρ_0 tel que pour toute perturbation w(x) de norme inférieur à ρ_0 , on puisse garantir une stabilisation pratique du système (3.2.31).

3.3 De la commande en boucle ouverte à la stabilisation

3.3.1 Introduction

Dans la suite de notre travail, nous nous sommes intéressés à la conception de retours d'état stabilisant à partir de commandes en boucle ouverte du système (3.3.1). Bien que basé sur des techniques de type horizon fuyant, notre objectif a consisté à éviter que n'intervienne un critère dont la minimisation est parfois délicate.

Il existe en fait relativement peu de méthodes permettant de stabiliser les systèmes non linéaires sans hypothèse de structure et les retours d'état issus de trajectoires en boucle ouverte ne sont pas très fréquents, hormis la commande optimale. Bien que nous ne citerons pas de travaux concernant la commande optimale, on pourra cependant remarquer le travail de Zarkh [1995], où, pour éviter le calcul de la commande optimale à chaque pas, il est proposé une correction à chaque instant de la commande optimale en boucle ouverte.

Les trajectoires en boucle ouverte interviennent fréquemment en robotique où elles jouent un rôle prépondérant. Le travail de Teel et al. [1995] peut être mentionné comme exemple de construction de retour d'état pour les systèmes chaînés, basé sur un faisceau

de commande en boucle ouverte ramenant asymptotiquement l'état à l'origine. L'évolution des systèmes en milieu hostile (obstacle, etc.) fait également largement appel à la génération de trajectoires en boucle ouverte. Elles sont ensuite suivie ou re-calculée suivant qu'une perturbation est venue, ou non, dévier le système de sa trajectoire prévue (on pourra consulter Kawaji et Matsunaga [1992]).

Enfin, les commandes en boucle ouverte sont largement utilisées dans le cas des systèmes différentiellement plats [Fliess et al., 1992, 1995, 1996]. En effet, dans ce cas, la trajectoire en boucle ouverte du système peut être paramètrée par la trajectoire d'une variable appelée sortie plate, évitant l'intégration du système. Un retour d'état peut alors être construit en régulant l'erreur entre la trajectoire du système et une trajectoire a priori définie ayant un comportement asymptotique *stable*.

L'idée générale du travail qui suit est la suivante :

Si on est capable pour tout instant t et tout état x donné de définir une commande en boucle ouverte $u_x(.)$ ramenant le système de cet état à l'origine (asymptotiquement ou en temps fini), alors à l'instant suivant t+dt (éventuellement infiniment proche de t) et en l'absence de perturbation, la commande $u_x(.-dt)$ ramène toujours le système asymptotiquement à l'origine.

Dans la première partie, nous nous intéresserons à une expression plus rigoureuse du point précédent en caractérisant la stabilité asymptotique de la boucle fermée. Pour cela, nous ajouterons des hypothèses additionnelles à celles, minimalistes, que nous avons considérées jusque là. Nous présenterons, dans une seconde partie, une forme algorithmique de la commande et, notamment, nous stabiliserons l'attitude d'un satellite à deux moteurs.

3.3.2 Conditions suffisantes de stabilisation

Nous considérons les systèmes asymptotiquement contrôlables de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.3.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ et f est supposée continue.

L'objectif est ici de formuler une condition nécessaire sur une stratégie de commande $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^p$ de telle sorte que le système bouclé :

$$\dot{x} = f(x, k(x))$$

ait un sens et soit asymptotiquement stable avec le choix k(x) := u(x,0). On pourra se référer à l'exemple 3.2.1 qui montre que, même pour une stratégie de commande stabilisante, le bouclage k(x) := u(x,0) ne stabilise pas forcément le système.

3.3.2.1 De la boucle ouverte à la boucle fermée

Nous appellerons **stratégie de commande attractive** toute stratégie de commande (cf. définition 3.2.4) u telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \to \infty} x(t; x, u(x, .)) = 0$. Une stratégie de commande attractive est donc une stratégie de commande rendant l'origine attractive.

L'ensemble constitué des trajectoires en boucle ouverte $\{x(.; x, u(x,.)); x \in \mathbb{R}^n\}$ sera appelé ensemble des **trajectoires attractées**.

Pour toute stratégie de commande attractive, on peut définir la fonction :

$$T_u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x,t) \longrightarrow x(t;x,u(x,.))$$
(3.3.2)

Remarque 3.3.1. Jusqu'à présent, seule une convergence asymptotique vers l'origine des trajectoires de la boucle ouverte est requise. Cette hypothèse est donc plus faible qu'une l'hypothèse de nulle contrôlabilité asymptotique 1.3.8. On peut donc raisonnablement supposer que le système (3.3.1) admet une stratégie de commande admissible.

Définition 3.3.1. On appellera stratégie de commande admissible toute stratégie de commande attractive u telle que :

1. $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+, t_1 \leq t_2 \text{ and } \forall x \in \mathbb{R}^n,$

$$T_u(T_u(x,t_1),t_2) = T_u(x,t_1+t_2)$$
(3.3.3)

2. T_u est continue en x uniformément par rapport au temps :

$$\lim_{x \to 0} \left[\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \| T_u(x, t) \| \right] = 0 \tag{3.3.4}$$

On a alors:

Théorème 3.3.1. Si il existe une stratégie de commande admissible u pour le système (3.3.1) alors la boucle fermée $\dot{x} = f(x, u(x, 0))$ est globalement asymptotiquement stable. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $T_u(x, .)$ est carré sommable, alors $\int_0^\infty ||T_u(x, \tau)||^2 d\tau$ est une fonction de Lyapounov.

3.3.2.2 Preuve du théorème 3.3.1

La preuve de ce théorème est basée sur la propriété clé (3.3.3). Pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tout $t \geq 0$, la trajectoire en boucle ouverte $x(.; x_0, u(x_0, .))$ est solution de l'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(x, u(x_0, t)) \qquad x(0) = x_0$$
 (3.3.5)

ce qui donne :

$$\dot{x}(t;x_0,u(x_0,.)) = f(x(t;x_0,u(x_0,.)),u(x_0,t))$$

Pour tout $\tau \in [0, t]$, on a par la définition de T_u (équation (3.3.2)) et par la relation (3.3.3) :

$$x(t; x_0, u(x_0, .)) = x(t - \tau; x(\tau; x_0, u(x_0, .)), u(x(\tau; x_0, u(x_0, .)), .))$$

et donc en utilisant (3.3.5), on obtient :

$$\dot{x}(t;x_{0},u(x_{0},.)) = f(x(t;x_{0},u(x_{0},.)),u(x_{0},t))
= f(x(t-\tau;x(\tau;x_{0},u(x_{0},.)),u(x(\tau;x_{0},u(x_{0},.)),.)),u(x(\tau;x_{0},u(x_{0},.)),t-\tau))
= f(x(t;x_{0},u(x_{0},.)),u(x(\tau;x_{0},u(x_{0},.)),t-\tau))$$

Cette dernière équation est vraie pour tout $\tau \in [0, t]$ donc en particulier pour $\tau = t$:

$$\dot{x}(t; x_0, u(x_0, .)) = f(x(t; x_0, u(x_0, .)), u(x(t; x_0, u(x_0, .)), 0))$$

La trajectoire $x(t; x_0, u(x_0, .))$ est donc également solution de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, u(x, 0))$$
 $x(0) = x_0$ (3.3.6)

La trajectoire en boucle ouverte d'un système dont la stratégie de commande u est telle que (3.3.3) soit vérifiée est donc exactement identique à la trajectoire du système bouclé (3.3.6) avec u(x,0) comme retour d'état.

Nous pouvons donc considérer le système autonome (3.3.6). On sait par hypothèse que l'origine est globalement attractive par définition des stratégies de commandes attractives et que les trajectoires sont continues par rapport à la condition initiale par (3.3.4). Il suffit donc d'en déduire la stabilité de l'origine.

Il est connu que dans le cas des systèmes autonomes, l'attractivité uniforme couplée à la continuité des trajectoires par rapport à la condition initiale implique la stabilité asymptotique du système [Hahn, 1967, théorème 38.1.]. C'est, dans notre cas, la même propriété qui s'applique : par uniforme continuité à l'origine on sait que pour tout R>0, il existe un voisinage $\mathcal{V}(0)$ de l'origine tel que :

$$\forall x \in \mathcal{V}(0), \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} ||x(t; x, u(x, .))|| \le R$$

ce qui n'est autre que la stabilité du système.

Soit V la fonction suivante :

$$V(x) = \int_{0}^{+\infty} ||T_{u}(x,\tau)||^{2} d\tau$$
 (3.3.7)

Soit x l'état du système à un instant t. Soit dx_{BO} (resp. dx_{BF}) l'évolution de l'état le long de la trajectoire en boucle ouverte (resp. en boucle fermée) pendant un temps dt. D'après (3.3.6) et (3.3.5), la trajectoire en boucle ouverte est identique à la trajectoire en boucle fermée :

$$dV(x)|_{BF} := V(x + dx_{BF}) - V(x)$$

$$= V(x + dx_{B0}) - V(x)$$

$$= \int_{0}^{dt} ||T_{u}(x, \tau)||^{2} d\tau$$

ce qui donne:

$$\lim_{dt\to 0}\frac{dV(x)|_{BF}}{dt} = -\|T(x,0)\|^2 = -\|x\|^2$$

V vérifie les propriétés suivantes :

- $V(x) \ge \phi(||x||)$ avec ϕ de classe \mathcal{K} - $\frac{dV(x)|_{BF}}{dt} \le -\psi(||x||)$ avec ψ de classe \mathcal{K} V est une fonction de Lyapounov

3.3.2.3 Remarques

- Un des intérêts du théorème 3.3.1 est de ne faire intervenir que des conditions sur la boucle ouverte, et non sur le système. Celles-ci sont beaucoup plus faciles à vérifier que par exemple une hypothèse de contrôlabilité asymptotique.
- Si on suppose l'existence d'une commande optimale $\hat{u}(x)$ associée à un coût J(x, u) (calculé soit sur un horizon infini, soit sur un horizon fini avec contrainte finale sur l'état), à savoir :

$$\hat{u} := \operatorname*{argmin}_{u} J(x, u)$$

alors, $\hat{x}(.; x, \hat{u}(x))$ vérifie la définition 3.3.1. La propriété (3.3.3) n'est rien d'autre que le principe d'optimalité de Bellman.

3.3.3 Application à un réacteur exothermique agité

Nous présentons ici la construction d'un retour d'état stabilisant basé sur le théorème 3.3.1 pour un réacteur exothermique continûment agité ("Continuous Stirred Tank Reactor" ou CSTR) .

3.3.3.1 Dynamique du CSTR

Nous considérons la réaction exothermique du premier ordre ayant lieu dans un récipient immergé dans un bain. Il s'agit d'un procédé alimenté en continu. Les équations d'états sont les suivantes :

$$\dot{x}_1 = D(1-x_1) \exp\left(\frac{\gamma x_2}{\gamma + x_2}\right) - x_1$$
 (3.3.8a)

$$\dot{x}_2 = BD(1-x_1)\exp\left(\frac{\gamma x_2}{\gamma + x_2}\right) - x_2 + \beta(x_J - x_2)$$
 (3.3.8b)

$$\dot{x}_J = \delta(u - x_J) \tag{3.3.8c}$$

où x_1 est la concentration en reactif, x_2 est la température adimensionnelle du réacteur et x_J est la température adimensionnelle du fluide du bain. x_J est habituellement la variable de commande. Cependant afin de prendre en compte un retard dû au temps nécessaire au transfert de chaleur entre le récipient et le fluide de refroidissement, la commande utilisée sera u; l'équation (3.3.8c) modélise ce retard et le paramètre δ permet régler le temps de transfert de la chaleur en fonction de la conductivité thermique des différents éléments.

 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_J^0)$ sera l'état initial du vecteur d'état $x = (x_1, x_2, x_J)$. Les valeurs numériques des différents paramètres utilisés sont consignées dans le tableau 3.1. Ce système

est connu pour avoir un comportement statique et dynamique délicat comme nous allons le montrer. L'objectif n'étant pas de rentrer dans les détails de la modélisation, nous conseillons la lecture de Uppal et al. [1974] et des références qui y sont mentionnées à tous ceux désireux de plus d'informations sur ce point.

γ	D	В	β	δ
20	0.072	8	0.3	3

Tableau 3.1 – Données numériques tirées de Buescher et Baum [1995]

3.3.3.2 Comportement asymptotique

On peut aisément vérifier que si l'on impose une valeur finale x_2^f à l'état x_2 , les autres états voient leurs valeurs finales uniquement déterminées par x_2^f en utilisant les équations :

$$x_1^f = \frac{D\Phi(x_2^f)}{1 + D\Phi(x_2^f)} \tag{3.3.9a}$$

$$x_J^f = \frac{1}{\beta} \left[(1+\beta)x_2^f - \frac{BD\Phi(x_2^f)}{1+D\Phi(x_2^f)} \right]$$
 (3.3.9b)

$$u^f = x_J^f (3.3.9c)$$

avec:
$$\Phi(x_2^f) = \exp\left(\frac{\gamma x_2^f}{\gamma + x_2^f}\right)$$
 (3.3.9d)

Or, si on regarde la figure 3.4(a), on remarque que le linéarisé est instable pour toute valeur de x_2^f dans l'intervalle [2,3.5]. Si aucun retour d'état n'est utilisé, le système "saute" du point d'équilibre désiré mais instable vers un point d'équilibre stable mais non désiré qui correspondra à la même valeur asymptotique de la commande. Ainsi, sur la figure 3.4(b) est représenté en pointillé l'intégration numérique du système en boucle ouverte. Les erreurs dues à la méthode numérique d'intégration utilisée font que la trajectoire ainsi obtenue n'est pas celle théoriquement escomptée (trait continu).

3.3.3.3 Expression de la loi de commande

Notre objectif est de stabiliser le CSTR autour d'un point d'équilibre x^f qui, par les équations (3.3.9), est entièrement déterminé par x_2^f . L'objectif consiste donc à trouver une stratégie de commande admissible u(x,.) pour le système (3.3.8). Rappelons que nous notons $T_u(x, x_2^f, .)$, la trajectoire en boucle ouverte du système (3.3.8) avec x comme condition initiale et x^f comme valeur asymptotique. Comme x^f est uniquement déterminé par x_2^f , on peut noter T_u comme une fonction de l'état initial x, de l'état final x_2^f et du temps. Dans le théorème 3.3.1, la stabilité asymptotique considérée est relative à l'origine; ici, la stabilité est souhaitée autour d'une valeur finale x^f qu'il faut donc mentionner dans l'expression de T_u . Des équations (3.3.8), on constate aisément que, si $x_1(.)$ est connu, on

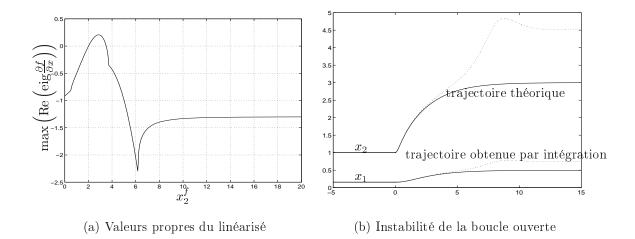


Figure 3.4 – Comportement de la boucle ouverte

peut déduire successivement $x_2(.)$ puis $x_J(.)$ et enfin la commande u. La recherche d'un stratégie de commande admissible peut donc se limiter à x_1 . Nous limiterons, de plus, notre choix aux stratégies u telles que, si $T_{u,j}$ désigne la j-ième composante de la fonction T_u , on ait :

$$T_{u,1}(x, x_2^f, t) = \Psi(t)a(x, x_2^f) = a_0(x, x_2^f) + \sum_{i=1}^N a_i(x, x_2^f) \exp(-\sigma_i t)$$
 (3.3.10)
avec : $\forall i, j \mid i > j > 0 \implies \sigma_i > \sigma_j > 0$

où $\Psi(t)=(1,\exp(-\sigma_1t),\ldots,\exp(-\sigma_Nt))$ est une base fonctionnelle et $a(x,x_2^f)=(a_0(x,x_2^f),\ldots,a_N(x,x_2^f))^T$ sont les coordonnées de $T_{u,1}(x,x_2^f,.)$ dans cette base.

Un retour d'état peut alors être obtenu en suivant les différentes étapes suivantes. Il faut souligner que dans le cas du CSTR, le retour d'état peut être analytiquement calculé. Ceci est essentiellement dû à une propriété structurelle autorisant une sorte de triangularisation du système. Quoiqu'il en soit, nous verrons par la suite que ce retour d'état se prête, tout du moins dans une version approchée, assez commodément à une implémentation numérique.

Première étape : [Calcul de $a(x, x_2^f)$]

La condition initiale x et la valeur finale de la température du réacteur x_2^f nous donnent un système linéaire d'équations d'inconnu a. Un choix de dimension de la base Ψ de N=3 nous assure l'existence et l'unicité de a pour tout x et x_2^f donnés :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & \dots & -\sigma_N \\ 0 & \sigma_1^2 & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{D\Phi(x_2^f)}{1+D\Phi(x_2^f)} \\ \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{pmatrix}$$
(3.3.11)

avec:

$$\dot{x}_{1} = D(1 - x_{1}) \exp\left(\frac{\gamma x_{2}}{\gamma + x_{2}}\right) - x_{1}$$

$$\ddot{x}_{1} = -\dot{x}_{1} \left[1 + D \exp\left(\frac{\gamma x_{2}}{\gamma + x_{2}}\right)\right] + \frac{D\gamma^{2}(1 - x_{1})}{(\gamma + x_{2})^{2}} \exp\left(\frac{\gamma x_{2}}{\gamma + x_{2}}\right).$$

$$\left[-x_{2} + BD(1 - x_{1}) \exp\left(\frac{\gamma x_{2}}{\gamma + x_{2}}\right) + \beta(x_{J} - x_{2})\right]$$

Indépendamment du choix de $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $T_{u,1}(x, x_2^f, t)$ est pour tout $t \geq 0$ uniquement déterminé par la condition initiale x et l'état final désiré x_2^f .

Deuxième étape : [Calcul de $u(x, x_2^f, .)$]

Une fois que la trajectoire $T_{u,1}(x, x_2^f, .)$ est connue, on peut déduire les trajectoires $T_{u,2}(x, x_2^f, .)$, $T_{u,3}(x, x_2^f, .)$ et la commande en boucle ouverte correspondante $u(x, x_2^f, .)$. Pour simplifier les expressions, nous noterons :

$$T_{1}(.) := T_{u,1}(x, x_{2}^{f}, .)$$

$$T_{2}(.) := T_{u,2}(x, x_{2}^{f}, .)$$

$$T_{3}(.) := T_{u,3}(x, x_{2}^{f}, .)$$

$$u(.) := u(x, x_{2}^{f}, .)$$

On a pour tout $t \geq 0$:

$$T_{2}(t) = \frac{\gamma \ln \Phi(t)}{\gamma - \ln \Phi(t)}$$

$$T_{3}(t) = \frac{1}{\beta} \left(\dot{T}_{2}(t) + (\beta + 1)T_{2}(t) - B(\dot{T}_{1}(t) + T_{1}(t)) \right)$$

$$u(t) = \frac{\dot{T}_{3}(t)}{\delta} + T_{3}(t)$$

avec:

$$\begin{split} &\Phi(t) &= \frac{\dot{T}_{1}(t) + T_{1}(t)}{D(1 - T_{1}(t))} \\ &\dot{\Phi}(t) &= \frac{\ddot{T}_{1}(t)(1 - T_{1}(t)) + \dot{T}_{1}^{2}(t) + \dot{T}_{1}(t)}{D(1 - T_{1}(t))^{2}} \\ &\ddot{\Phi}(t) &= \frac{\frac{d^{3}T_{1}}{dt^{3}}(t)(1 - T_{1}(t)) + \dot{T}_{1}(t)\ddot{T}_{1}(t) + \ddot{T}_{1}(t)}{D(1 - T_{1}(t))^{2}} + \frac{2\dot{T}_{1}(t)\left(\ddot{T}_{1}(t)(1 - T_{1}(t)) + \dot{T}_{1}^{2}(t) + \dot{T}_{1}(t)\right)}{D(1 - T_{1}(t))^{3}} \\ &\dot{T}_{2}(t) &= \frac{\dot{\Phi}(t)\gamma^{2}}{\Phi(t)(\gamma - \ln\Phi(t))^{2}} \\ &\ddot{T}_{2}(t) &= \frac{\dot{\Phi}(t)\Phi(t) - \dot{\Phi}^{2}(t)}{\Phi^{2}(t)} \frac{\gamma^{2}}{(\gamma - \ln\Phi(t))^{2}} + \frac{\dot{\Phi}(t)}{\Phi(t)} \frac{2\gamma^{2}}{(\gamma - \ln\Phi(t))^{3}} \end{split}$$

$$\dot{T}_3(t) = \frac{1}{\beta} \left(\ddot{T}_2(t) + (\beta + 1)\dot{T}_2(t) - B(\ddot{T}_1(t) + \dot{T}_1(t)) \right)$$

Dernière étape : [Appliquer $u(x, x_2^f, 0)$]

Le retour d'état rendant x^f asymptotiquement stable est alors simplement donné par $k(x, x_2^f) := u(x, x_2^f, 0)$. Le choix de $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ reste libre et permet de régler le comportement du système pendant le transitoire.

3.3.3.4 Stabilité de la boucle fermée

Nous allons ici simplement vérifier que u est bien une stratégie de commande admissible au sens de la définition 3.3.1 pour le système (3.3.8).

- T(.) vérifie (3.3.3). En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t_1 \geq t_2 \geq 0$:

$$T_{1}(t_{1}) = a_{0}(x, x_{2}^{f}) + \sum_{j=1}^{3} a_{j}(x, x_{2}^{f})e^{-\sigma_{j}t_{1}}$$

$$\dot{T}_{1}(t_{1}) = \sum_{j=1}^{3} -\sigma_{j}a_{j}(x, x_{2}^{f})e^{-\sigma_{j}t_{1}}$$

$$\ddot{T}_{1}(t_{1}) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{j}^{2}a_{j}(x, x_{2}^{f})e^{-\sigma_{j}t_{1}}$$

on a donc:

$$\begin{pmatrix} T_1(t_1) \\ \frac{D\Phi(x_2^f)}{1+D\Phi(x_2^f)} \\ \dot{T}_1(t_1) \\ \ddot{T}_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 \\ 0 & \sigma_1^2 & -\sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\sigma_1 t_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sigma_1 t_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\sigma_3 t_1} \end{pmatrix} a(x, x_2^f)$$

ce qui donne avec (3.3.11):

$$a(T(x,t_1),x_2^f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\sigma_1 t_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sigma_1 t_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\sigma_3 t_1} \end{pmatrix} a(x,x_2^f)$$

et donc:

$$T(T(x, t_1), t_2) = \Psi(t_2)a(T(x, t_1), x_2^f)$$

$$= \Psi(t_2)\operatorname{diag}(\Psi(t_1))a(x, x_2^f)$$

$$= \Psi(t_1 + t_2)a(x, x_2^f)$$

$$= T(x, t_1 + t_2)$$

-T est clairement uniformément continue en x par rapport au temps. Donc, $k(x, x_2^f) := u(x, x_2^f, 0)$ rend l'état x^f globalement asymptotiquement stable.

3.3.3.5 Simulation

La figure 3.5 représente l'évolution du système bouclé. La trajectoire à suivre est une série de deux créneaux successifs sur x_2 . Le premier simule une valeur asymptotique $x_2^f = 3$, donc dans la zone instable du système tandis que la seconde est dans la zone stable.

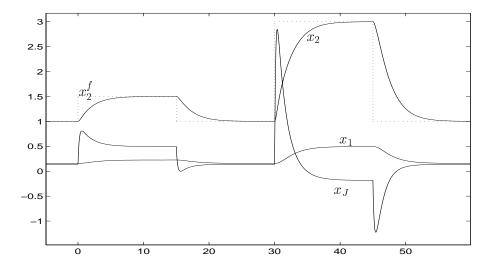


Figure 3.5 – Trajectoires du système bouclé

3.3.4 Stabilisation numérique

Notre objectif a été alors de mettre en œuvre "informatiquement" le retour d'état cidessus. En effet, la propriété (3.3.3), point clé des résultats précédents, peut être formulée de manière utilisable pour la conception numérique d'un retour d'état. Ce point est primordial car, comme nous l'avons souligné précédemment, une version analytique du retour d'état n'est réalisable que dans le cas où le système possède une structure particulière.

La transcription numérique de la commande se traduit en deux grands points principaux. Le premier, que nous allons voir au paragraphe 3.3.4.1, consiste à exprimer la condition (3.3.3) en termes algorithmiques. Une version "basique" est tout d'abord présentée pour être ensuite légèrement modifié afin de prendre en compte une éventuelle modification non prévue de la trajectoire. Dans le second point, présenté au paragraphe 3.3.4.2, nous explicitons les routines U, R, S et Q. Ce paragraphe a fait l'objet d'une publication [Alamir et Marchand, 1999].

3.3.4.1 Expression algorithmique de la commande

Nous considérerons ici des systèmes de la forme :

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n_u - 1}u}{dt^{n_u - 1}}\right) = 0$$
(3.3.12)

où, comme à l'habitude, $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^p$ la commande et \mathcal{X} le domaine de \mathbb{R}^n en considération. On suppose que l'origine est un point d'équilibre dans le sens où $f(0,\ldots,0)=0$. On notera $x(t;x_0,t_0,u)$, la solution de l'équation (3.3.12), avec x_0 comme condition initiale à l'instant t_0 et u, n_u-1 fois dérivable, comme commande. On suppose que le système (3.3.12) vérifie l'hypothèse :

Hypothèse 3.3.2. Il existe un temps fini $t_{f_{min}}$ tel que, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathcal{X}$, il existe une commande en boucle ouverte v, définie sur $[0, t_{f_{min}}]$ qui ramène l'état du système à l'origine : $x(t_{f_{min}}; x_0, v) = 0$.

Soit $t_f \geq t_{f_{min}}$, un temps fixé. Cette hypothèse classique en horizon fuyant découle de l'impossibilité numérique qu'il y a à chercher une commande en boucle ouverte sur un horizon infini. On défini alors l'ensemble des commandes en boucle ouverte permettant, d'un point $x_0 \in \mathcal{X}$, de rejoindre l'origine, en un temps t_f :

$$\mathcal{A}(x_0) := \{ u; \ x(t_f; x_0, u) = 0 \}$$
(3.3.13)

L'approche utilisée par la suite est celle de l'horizon fuyant, consistant à chaque instant t à chercher une trajectoire en boucle ouverte et la commande correspondante et à l'appliquer jusqu'à l'instant suivant t+dt. Si dt est infiniment petit, on se trouve dans le schéma continu qui est sous-jacent dans la relation (3.3.3) et qui aboutit à un retour d'état statique classique de la forme k(x). Par contre, si dt = T > 0, on se trouve dans le cas continu-discret avec un échantillonnage de période T et un retour d'état de la forme k(x(kT),t) où x(kT) est la valeur de l'état aux instants d'échantillonnage kT et $t \in [kT, (k+1)T]$. C'est dans ce dernier schéma que nous nous situerons désormais. Ainsi, on choisit une période d'échantillonnage T > 0.

a. Formulation minimale

Supposons de manière abstraite qu'un ensemble \mathcal{P} de paramètres soit suffisant pour caractériser les différents éléments de $\mathcal{A} := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{A}(x)$. En d'autres termes, supposons qu'il existe deux fonctions :

$$U : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \to \mathcal{X} \times (\mathbb{R}^p)^{[0,t_f]}$$
 (3.3.14)

$$R : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \to \mathcal{X} \times \mathcal{P} \tag{3.3.15}$$

telles que :

$$U \circ R = Id_{\mathcal{X} \times \mathcal{A}} \tag{3.3.16}$$

où $(\mathbb{R}^p)^{[0,t_f]}$ désigne l'ensemble des fonctions de $[0,t_f]$ dans \mathbb{R}^p . U permet, à partir des paramètres, d'obtenir la commande correspondante (en tant que fonction du temps); tandis que R permet, à partir d'une commande, d'obtenir les paramètres la caractérisant. U et R sont supposées laisser le premier de leurs arguments inchangé.

Soit S une fonction "translation" définie par :

$$S: (\mathbb{R}^{p})^{[0,t_{f}]} \times [0,t_{f}] \to (\mathbb{R}^{p})^{[0,t_{f}]}$$

$$(u,D) \to \begin{cases} u(t+D) & \text{si } t \in [0,t_{f}-D[\\ 0 & \text{si } t \in [t_{f}-D,t_{f}] \end{cases}$$
(3.3.17)

Supposons enfin que l'on dispose d'une procédure systématique Q qui, pour tout $(x_0, p_0) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{P})$, renvoie x_0 et les paramètres d'une commande u de $\mathcal{A}(x_0)$:

$$U(Q(x_0, p_0)) \in \{x_0\} \times \mathcal{A}(x) \quad \forall (x_0, p_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{P}$$
(3.3.18)

On suppose de plus que si p_0 correspond à une commande dans $\mathcal{A}(x_0)$, alors $Q(x_0, p_0) = (x_0, p_0)$. En d'autres termes, cela veut simplement dire que, si Q est initialisé avec une solution, c'est cette même solution qui est renvoyée par la procédure. C'est normalement le cas des routines habituelles d'optimisation.

Pour tout $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_q$, notons $\pi_i(\eta)$, la $i^{\text{ème}}$ partie de η .

On a alors le théorème suivant qui est une traduction de la propriété (3.3.3) :

Théorème 3.3.3. Le retour d'état suivant :

$$u(nT+t) = K_n(t) \quad 0 < t < T \tag{3.3.19}$$

où:

$$K_n := \pi_2 (U \circ Q(x(nT), p_n)) \in (\mathbb{R}^m)^{[0, t_f]}$$
 (3.3.20)

$$p_{n} := \begin{cases} \pi_{2} \left(R \left(x(nT), S(K_{n-1}, T) \right) \right) \in \mathcal{P} & n \geq 1 \quad si \ n > 0 \\ arbitrairement \ choisi \ dans \ \mathcal{P} & si \ n = 0 \end{cases}$$
(3.3.21)

existe et rend l'origine globalement attractive.

Preuve du théorème 3.3.3:

La preuve de ce théorème est évidente et découle du fait qu'ici aussi, trajectoire en boucle ouverte et trajectoire en boucle fermée sont identiques. Ainsi, on a :

$$u(t + nT) = K_n(t)$$

$$= \pi_2 (U \circ Q(x(nT), p_n))$$

$$= \pi_2 (U(x(nT), p_n)) \text{ car } p_n \text{ est solution du problème}$$

$$= \pi_2 (U(R(x(nT), S(K_{n-1}, T))))$$

$$= S(K_{n-1}, T)$$

$$= (3.3.16)$$

$$= K_{n-1}(t + T)$$

$$= K_{n-2}(t + 2T) = \dots = K_0(t + nT)$$

et donc $u(t) = K_0(t)$; la boucle fermée a exactement la même évolution que le système en boucle ouverte $x(.; x_0, K_0)$. Or, K_0 est donné par l'équation (3.3.20) et est donc une commande en boucle ouverte qui de x_0 ramène le système en un temps t_f à l'origine, ce qui achève la preuve.

b. Prise en compte d'une perturbation

Le retour d'état proposé au théorème 3.3.3 peut être modifié de manière à reconsidérer le problème en cas de "non-conformité" de la trajectoire en boucle fermée par rapport à celle en boucle ouverte, théoriquement identique. Pour tout $x \in \mathcal{X}$ et p tel que $\pi_2(U(x,p)) \in \mathcal{A}(x)$, on définit :

$$M(x,p) := \sup_{0 < t < T} \|x(t; x, \pi_2(U(x,p)))\|$$
(3.3.22)

M(x,p) est le plus petit rayon r tel que la trajectoire en boucle ouverte reste, si aucune perturbation ne vient la dévier, dans la boule $\mathcal{B}(r)$. La définition de M(x,p) permet de définir un "indicateur de perturbation" par :

$$e(nT+t) := ||x(nT+t)|| - \lambda M(x(nT), p_n) \quad 0 \le t \le T$$
(3.3.23)

où $\lambda > 1$ est un paramètre fixe de sécurité. Si une perturbation fait sortir la trajectoire de la boule $\mathcal{B}(\lambda M(x(nT), p_n))$ à un instant \bar{t} de [nT, (n+1)T], e devient au même moment positive. Si une telle situation se produit, il est raisonnable de réexaminer la stratégie. \bar{t} devient le nouvel "instant de décision"; c'est à dire, un instant pour lequel une commande en boucle ouverte est calculée à nouveaux. Une conséquence est que les instants de décision ne sont plus nécessairement de la forme nT. On définit D, dépendant du temps, comme étant le "dernier instant de décision":

$$D := \max \left\{ E\left(\frac{t}{T}\right) T, \bar{t} \right\} \tag{3.3.24}$$

où $E(\frac{t}{T})$ est la partie entière de $\frac{t}{T}$ et \bar{t} le dernier instant pour lequel e(t) est devenu positif.

On redéfinit alors e afin de prendre en compte l'irrégularité dans les instants de décision :

$$e(D+t) := ||x(D+t)|| - \lambda M(x(D), p(D)) \quad 0 \le t < T$$
(3.3.25)

où p(D) est le pendant de p_k et \bar{t} est initialisé à 0.

Avec les re-définitions précédentes, on a :

Théorème 3.3.4. Soit D défini par les équations (3.3.24)-(3.3.25) et D^* , la valeur de D avant que celle-ci ne change. Le retour d'état :

$$u(D+t) = K_D(t)$$
 ; $0 \le t < T$ (3.3.26)

où:

$$K_D := \pi_2 \Big(U \circ Q(x(D), p(D)) \Big) \tag{3.3.27}$$

$$p(D) := \begin{cases} \pi_2 \left(R \left(x(D), S(K_{D^*}, D - D^*) \right) \right) & \text{si } D > 0 \\ \text{arbitrairement choisi dans } \mathcal{P} & \text{si } D = 0 \end{cases}$$
 (3.3.28)

rend l'origine globalement attractive.

Remarque 3.3.2. Le résultat précédent n'est pas un résultat de robustesse. Il a pour but de limiter les effets d'une perturbation "ponctuelle", évitant, par exemple, des phénomènes de divergence en temps fini.

3.3.4.2 Considérations numériques

a. Classe des systèmes considérée

Pour toute fonction du temps, on note $F(\tilde{z}(t)) = 0$, une relation générale entre z et un nombre fini de ses dérivées (composante par composante). Ainsi, le système (3.3.12) peut s'écrire sous la forme $f(\tilde{z}(t)) = 0$ avec $z = \binom{x}{y}$. On dira alors que :

Définition 3.3.2. Les équations

$$f(\tilde{z}(t)) = 0 \tag{3.3.29}$$

sont sous forme normale si il existe :

- 1. une subdivision de $z =: \binom{z_F}{z_D}$ avec, $z_F \in \mathbb{R}^{n_F}$, $z_D \in \mathbb{R}^{n_D}$ et $n_F \neq 0$ telle que la contrainte (3.3.29) soit compatible avec un choix a priori de $z_F(.)$ comme fonction du temps dans la limite où les conditions initiales sont respectées.
- 2. n_D relations $[F_i]_{1 \leq i \leq n_D}$ telles que la contrainte (3.3.29) puisse être mise sous la forme triangulaire équivalente suivante :

$$F_i(\tilde{z}_F(t), \tilde{z}_{D_1}(t), \tilde{z}_{D_2}(t), \dots, \tilde{z}_{D_i}(t)) = 0 \qquad 1 \le i \le n_D$$
 (3.3.30)

Une telle forme permet en fait de calculer successivement $z_{D_1}, z_{D_2}, \ldots, z_{Dn_D}$ à partir de la connaissance de z_F . L'objectif sera ainsi de ne rechercher les trajectoires en boucle ouverte que sur z_F dans la mesure où z_D en sera déduit.

Un certain nombre de classes usuelles de systèmes non linéaires peuvent se mettre sous la forme triangulaire ci-dessus.

Systèmes différentiellement plats:

En effet, le système $f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ est différentiellement plat si l'on peut trouver $y = h(\tilde{x}, \tilde{u})$ (appelée sortie plate) pour laquelle il existe deux fonctions G et H vérifiant [Fliess et al., 1996, 1992] :

$$x = G(\tilde{y})$$
 ; $u = H(\tilde{y})$

Si on note:

$$\tilde{z} := \begin{pmatrix} y \\ x \\ u \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{f}(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} y - h(\tilde{x}, \tilde{u}) \\ x - G(\tilde{y}) \\ u - H(\tilde{y}) \end{pmatrix}$$

on a directement $\bar{f}(\tilde{z}) = 0$ sous forme normale avec :

$$z_F := y \quad ; \quad z_D := \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

Plus encore, les relations $F_i = 0$ sont des égalités algébriques triviales de la forme (3.3.31) au lieu d'équations.

$$F_i(\tilde{z}_F, \tilde{z}_{D_i}) = G_i(\tilde{z}_F) - z_{D_i} = 0 (3.3.31)$$

Systèmes chaînés:

Soit un système chaîné sous la forme générale à m+1 entrées, m.(m+1) chaînes et m+1 générateurs [Walsh et Bushnell, 1993] :

$$\dot{x}_{j}^{0} = v_{j} \qquad 0 \leq j \leq m
\dot{x}_{ji}^{1} = x_{j}^{0}v_{i} \qquad j > i \qquad \text{et} \qquad x_{ij}^{1} = x_{i}^{0}x_{j}^{0} - x_{ji}^{1}
\dot{x}_{ji}^{k} = x_{ji}^{k-1}v_{i} \quad 1 \leq k \leq n_{j}, \quad 0 \leq j, i \leq m, \quad j \neq i$$
(3.3.32)

Le système (3.3.32) est déjà sous la forme normale en prenant :

$$z_F := (v_0, \dots, v_m)$$

$$z_D := \left(x_0^0, \dots, x_m^0, (x_{ji}^1)_{0 \le i < j \le m}, (x_{ij}^1)_{0 \le i < j \le m}, \dots, (x_{ji}^{n_j})_{0 \le i < j \le m}, (x_{ij}^{n_j})_{0 \le i < j \le m}\right)$$

b. Mise en œuvre numérique

La mise en œuvre numérique de la commande fait une utilisation intensive des polynômes de Chebyshev. Rappelons que, sur un intervalle $[0, t_f]$, ils sont définis par :

$$T_0(t) := 1$$
 (3.3.33a)

$$T_1(t) := 2\frac{t}{t_f} - 1 \tag{3.3.33b}$$

$$T_n(t) := 2\left(2\frac{t}{t_f} - 1\right)T_{n-1}(t) - T_{n-2}(t)$$
 (3.3.33c)

Sur la figure 3.6 sont tracés les différents polynômes en fonction de leur ordre.

Soit T(t,q,N), la matrice de $\mathbb{R}^{q\times Nq}$ définie par :

$$T(t,1,N) := [T_1(t), \dots, T_N(t)]$$

$$T(t,q,N) := \begin{pmatrix} T(t,1,N) & 0_{1\times N} & \dots & 0_{1\times N} \\ 0_{1\times N} & T(t,1,N) & 0_{1\times N} & 0_{1\times N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & T(t,1,N) \end{pmatrix}$$

$$pour q \ge 2 \quad (3.3.35)$$

T(t,q,N) forme une base fonctionnelle dans laquelle on peut écrire, pour toute fonction v(.) à valeur dans \mathbb{R}^p , une approximation de cette fonction de la manière suivante :

$$v(t) \approx [T(t, q, N)] a \qquad a \in \mathbb{R}^{N,q}$$

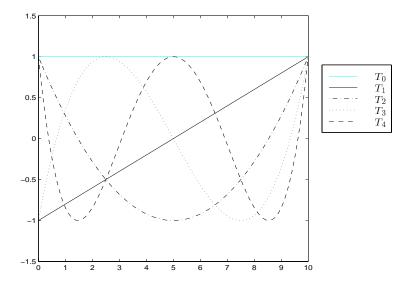


Figure 3.6 – Polynômes de Chebyshev

Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on notera $T_i^{(m)}(t)$ la $m^{\text{\`e}me}$ dérivée de $T_i(t)$ et $T_i^{(-m)}(t)$ la $m^{\text{\`e}me}$ primitive de $T_i(t)$ s'annulant en 0. Pour tout $q \geq 1$, on peut ainsi naturellement définir les matrices $(q \times Nq)$ correspondantes $T^{(m)}(t,q,N)$ et $T^{(-m)}(t,q,N)$ conformément à (3.3.35).

Revenons maintenant à la mise en œuvre numérique de la stratégie de commande. Le premier point va consister à écrire les relations (3.3.30) dans la base fonctionnelle précédente. Soit a les coordonnées de z_F sur la base polynômiale $T(1, n_F, N_F)$:

$$z_F(t) := T(t, n_F, N_F)a \qquad a \in \mathbb{R}^{N_F n_F}$$
 (3.3.36)

où, rappelons le, n_F est la dimension du vecteur z_F et N_F la dimension de la base de Chebyshev choisie pour représenter z_F . Rappelons également que le système (3.3.12) peut s'écrire sous la forme normale :

$$F_i(\tilde{z}_F(t), \tilde{z}_{D_1}(t), \dots, \tilde{z}_{D_{i-1}}(t), \tilde{z}_{D_i}(t)) = 0 \qquad 1 \le i \le n_D$$
 (3.3.37)

avec
$$\tilde{z}_{D_i} = \left(z_{D_i}, \frac{dz_{D_i}}{dt}, \dots, \frac{d^{n_i}z_{D_i}}{dt^{n_i}}\right)$$
 (3.3.38)

Si pour tout $i \in [1, n_D]$, α_i désigne les coordonnées de la meilleure approximation de z_{D_i} au sens des moindres carrés, c'est à dire :

$$z_{D_i}(t) \approx T(t, 1, N_D).\alpha_i(a)$$

où α_i solution du problème de minimisation :

$$\alpha_{i}(a) = Arg \left\{ \min_{\substack{\alpha_{i} \in \mathbb{R}^{N_{D}} \\ T(0;1,N_{D})\alpha_{i} = z_{d_{i}}(0)}} \sum_{j=1}^{N_{a}} \left\| F_{i} \left(\tilde{z}_{F}(t_{j}), \dots, \tilde{T}(t_{j}, 1, N_{D}) . \alpha_{i} \right) \right\|^{2} \right\}$$
(3.3.39)

où N_a est un nombre d'instants choisi a priori pour la résolution du problème aux moindres carrés. On remarquera que la contrainte initiale $T(0; 1, N_D)\alpha_i = z_{d_i}(0)$ est linéaire. Les équations (3.3.37) s'écrivent alors :

$$NLE_i(t_f, x_0, a) := T(t_f, 1, N_D)\alpha_i(a) = 0 \qquad i \in [l_D + 1, n_D]$$
(3.3.40)

ces dernière équations sont les équations algébriques en a recherchées équivalentes aux relations (3.3.37). La forme triangulaire permet leur résolution successivement pour chaque z_{D_i} .

Remarque 3.3.3. La projection sur une base fonctionnelle est une technique relativement classique. Dans l'absolu, elle n'apporte pas forcément par rapport à une intégration classique : si la dimension de la base est trop grande, des problèmes numériques s'en suivent, par contre, si elle est trop faible, l'approximation risque d'être trop loin du signal réel. Dans notre cas, elle apporte une simplification du problème dans la mesure où l'espace sur lequel la solution est recherchée peut être sensiblement réduit :

- en répercutant les conditions initiales et finales sur z_F en n_{L_F} contraintes **linéaires** sur a. Notons que n_{L_F} peut être plus petit que $2n_F$ dans la mesure où certaines composantes de z_F peuvent correspondre à des entrées, et donc, ne pas avoir de conditions initiales imposées.
- si un ensemble de l_D équations (3.3.37) donnent des problèmes aux moindres carrés (3.3.39) linéaires en a. Les conditions initiales et finales se traduisent alors en n_{L_D} contraintes linéaires en a. Comme pour z_F , n_{L_D} peut être plus petit que $2l_D$.

La dimension effective du problème à résoudre peut être réduite, de $(n_F N_F)$ initialement, à $(n_F N_F - n_L)$, où $n_L := n_{L_F} + n_{L_D}$. Dans la suite, nous noterons donc a(p), pour indiquer que $a \in \mathbb{R}^{n_F N_F}$ dépend d'un vecteur $p \in \mathbb{R}^{n_F N_F - n_L}$ de paramètres dont le choix est a priori complètement libre. Soulignons que cette dépendance est linéaire. Ce point sera illustré dans les exemples qui suivent.

On aboutit ainsi à la définition des routines U et R suivantes :

$$U(x_0, p_0) = (x_0, u(.)) (3.3.41)$$

$$R(x_0, u_0) = (x_0, p) (3.3.42)$$

οù

- u est déduit de $z_F(.) = T(., n_F, N_F)a(p_0)$ par l'équation (3.3.40).
- p est le vecteur de coordonnées de la projection sur la base fonctionnelle de la trajectoire $z_F(.)$ du système lorsque la commande $u_0(.)$ lui est appliquée.

La procédure Q de recherche de trajectoire est :

$$Q(x_0, p_0) = \left(x_0, \left(\begin{array}{c} \text{solution sur } p \text{ de } \left[\left(NLE_i(t_f, x_0, p) = 0\right)_{l_D < i \le n_D}\right] \\ \text{avec } p_0 \text{ comme initialisation} \end{array}\right)\right)$$
(3.3.43)

3.3.5 Exemples

3.3.5.1 Système divergent en temps fini

Ce système a été choisi pour mettre en valeur la modification exposée au paragraphe 3.3.4.1.b.

$$\dot{x} = x^2 + u \tag{3.3.44}$$

Si une perturbation suffisamment forte intervient à un instant $\bar{t} \in]kT, (k+1)T[$, entre deux périodes d'échantillonnage, le système peut diverger avant l'instant (k+1)T, qui est, dans la formulation minimale, l'instant où la commande sera reconsidéré.

Ce système est sous forme normale avec : $z_f = x$ et $z_D = u$. Sur la figure 3.7 sont représentées les évolutions du système (3.3.44) avec et sans détection de la perturbation. Dans le premier cas, l'état du système est ramené à l'origine, dans le second, il diverge. A l'instant $T_{pert} = 1.25s$, une perturbation consistant en l'ajout de $X_{pert} = 1.5$ sur l'état du système est appliquée.

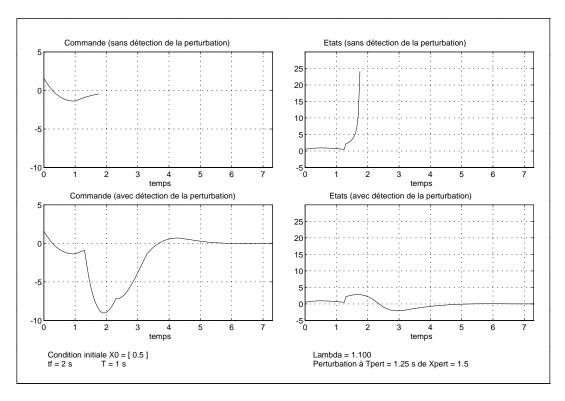


Figure 3.7 – Système à divergence en temps fini

3.3.5.2 Le pendule inversé

Considérons les équations du pendule inversé à action horizontale suivantes :

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.3.45a}$$

$$\dot{x}_2 = \Phi_2(x_1, x_2) + \Psi_2(x_1)u \tag{3.3.45b}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{3.3.45c}$$

$$\dot{x}_4 = \Phi_4(x_1, x_2) + \Psi_4(x_1)u$$
 (3.3.45d)

avec

$$\Phi_{2}(x_{1}, x_{2}) := \frac{-aL \sin x_{1} \cos x_{1} x_{2}^{2} + g \sin x_{1}}{L(1 - a \cos^{2} x_{1})}$$

$$\Psi_{2}(x_{1}) := \frac{-\frac{a}{m} \cos x_{1}}{L(1 - a \cos^{2} x_{1})}$$

$$\Phi_{4}(x_{1}, x_{2}) := \frac{aL x_{2}^{2} \sin x_{1} - ag \sin x_{1} \cos x_{1}}{1 - a \cos^{2} x_{1}}$$

$$\Psi_{4}(x_{1}) := \frac{\frac{a}{m}}{1 - a \cos^{2} x_{1}}$$

où M est la masse de la barre, m la masse du poids située à son extrémité, L sa longueur, g est la gravité terrestre et $a = \frac{m}{M+m} = 0.2$. Dans ces équations, x_1 est l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale, x_2 sa dérivée, x_3 est la position du chariot sur l'axe horizontal et x_4 sa vitesse. u est la force horizontale appliquée sur le chariot. On pourra se reporter à la figure 3.8.

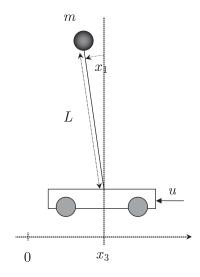


Figure 3.8 – Pendule inversé à action horizontale

Le pendule est déjà sous forme normale avec :

$$z_F := x_1 \quad ; \quad z_D := (x_2 \ u \ x_4 \ x_3)^T$$

et

$$F_1(\tilde{z}_F, \tilde{z}_{D_1}) := \dot{z}_F - z_{D_1}$$
 (3.3.46a)

$$F_2(\tilde{z}_F, \tilde{z}_{D_1}, \tilde{z}_{D_2}) := \dot{z}_{D_1} - \Phi_2(z_F, z_{D_1}) - \Psi_2(z_F)z_{D_2}$$
 (3.3.46b)

$$F_{2}(\tilde{z}_{F}, \tilde{z}_{D_{1}}, \tilde{z}_{D_{2}}) := \dot{z}_{D_{1}} - \Phi_{2}(z_{F}, z_{D_{1}}) - \Psi_{2}(z_{F})z_{D_{2}}$$

$$F_{3}(\tilde{z}_{F}, \tilde{z}_{D_{1}}, \tilde{z}_{D_{2}}, \tilde{z}_{D_{3}}) := \dot{z}_{D_{3}} - \Phi_{4}(z_{F}, z_{D_{1}}) - \Psi_{4}(z_{F})z_{D_{2}}$$

$$(3.3.46b)$$

$$(3.3.46c)$$

$$F_4(\tilde{z}_F, \tilde{z}_{D_1}, \tilde{z}_{D_2}, \tilde{z}_{D_3}, \tilde{z}_{D_4}) := \dot{z}_{D_4} - z_{D_3}$$
 (3.3.46d)

On remarque également que z_F est un état; la condition initiale et la contrainte finale donnent donc $n_{L_F}=2$. De plus, sur l'équation (3.3.46a), on voit que z_{D_1} est linéaire en a; donc la contrainte finale $z_{D_1}(t_f)=0$ donne $n_{L_D}=1$. Enfin, les équations (3.3.46b) à (3.3.46d) donnent des problèmes aux moindres carrés (3.3.39) linéaires en a; en conséquence, une fois le vecteur p de paramètres définissant z_F connu, l'intégration du système se fait en résolvant trois équations matricielles linéaires. En conclusion, la recherche d'une trajectoire (donc de p) ne nécessite en fait la résolution que de trois équations non linéaires en p. Si la période d'échantillonnage n'est pas trop grande (pour éviter la propagation des erreurs liées aux approximations), la procédure de résolution peut être initialisée proche de la solution.

Deux simulations sont représentées sur la figure 3.9, dont une partant d'une position initiale inclinée de 50° par rapport à la verticale, montrant le bon comportement de la méthode dans des domaines fortement non linéaires. Les valeurs numériques utilisées pour les simulations sont présentées dans le tableau 3.2. La dimension de la base a été prise égale à $N_F := 8$, l'inconnue p est donc de dimension $N_F - n_{L_F} - n_{L_D} = 4$. Les états du système rejoignent l'origine au bout d'un temps de 1.5 s à 2 s alors que l'horizon est de $t_f = 1 s$. Cette différence est due aux approximations résultantes de la projection sur la base, donnant à l'état du système un comportement asymptotique.

g	L	m	M
$9.81 N m^{-1}$	0.6 m	0.125 kg	0.5 kg

Tableau 3.2 – Données numériques du pendule inversé

3.3.5.3 La bille sur une barre

Ce système, étudié dans Fliess et al. [1996]; Hauser et al. [1992] est également connu pour ne pas être différentiellement plat. Après un retour d'état trivial, les équations dynamiques de ce système sont :

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.3.47a}$$

$$\dot{x}_2 = -Bg\sin(x_3) + Bx_4^2x_1 \tag{3.3.47b}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \tag{3.3.47c}$$

$$\dot{x}_4 = u \tag{3.3.47d}$$

où x_1 est la position de la bille sur la barre et x_3 l'inclinaison de cette dernière par rapport à l'horizontal (cf. figure 3.10).

Les équations (3.3.47) sont déjà sous la forme normale avec comme choix :

$$z_F := w$$
 ; $z_D := (x_4 \ x_3 \ x_1 \ x_2)^T$

et:

$$F_1(\tilde{z}_F, \tilde{z}_{D_1}) := \dot{z}_{D_1} - z_F$$
 (3.3.48a)

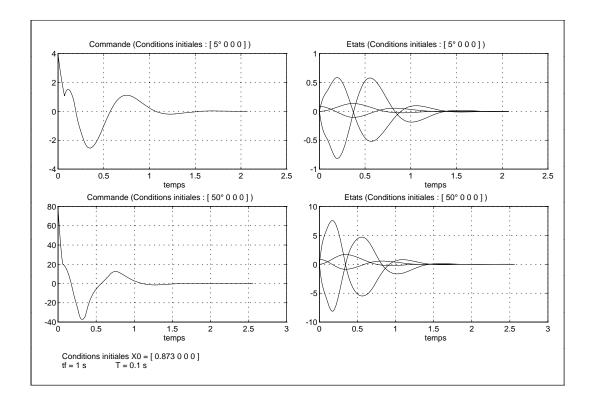


Figure 3.9 – Pendule inversé à action horizontale

$$F_2(\tilde{z}_F, \tilde{z}_{D_1}, \tilde{z}_{D_2}) := \dot{z}_{D_2} - z_{D_1}$$
 (3.3.48b)

$$F_{3}(\tilde{z}_{F}, \tilde{z}_{D_{1}}, \tilde{z}_{D_{2}}, \tilde{z}_{D_{3}}) := z_{D_{3}}^{(2)} + Bg\sin(z_{D_{2}}) - Bz_{D_{1}}^{2}z_{D_{3}}$$

$$F_{4}(\tilde{z}_{F}, \tilde{z}_{D_{1}}, \tilde{z}_{D_{2}}, \tilde{z}_{D_{3}}, \tilde{z}_{D_{4}}) := \dot{z}_{D_{3}} - z_{D_{4}}$$

$$(3.3.48c)$$

$$(3.3.48d)$$

$$F_4(\tilde{z}_F, \tilde{z}_{D_1}, \tilde{z}_{D_2}, \tilde{z}_{D_3}, \tilde{z}_{D_4}) := \dot{z}_{D_3} - z_{D_4}$$
 (3.3.48d)

Dans cet exemple, z_F est la commande du système et donc n'a qu'une contrainte finale $z_F(t_f) = 0$ d'imposée; on a $n_{L_F} = 1$. Sur les équations (3.3.48a) et (3.3.48b), on voit facilement que z_{D_1} et z_{D_2} dépendent linéairement de a. En conséquence, les contraintes finales sur z_{D_1} et z_{D_2} donnent $n_{L_D}=2$. Comme dans le cas du pendule inversé, les problèmes aux moindres carrés (3.3.39) issus des équations (3.3.48c) et (3.3.48d) sont linéaires; en conséquence, une fois le vecteur p de paramètres définissant z_F connu, l'intégration du système se fait en résolvant deux équations matricielles linéaires. La recherche d'une trajectoire, et donc de p, se résume donc à la résolution de deux équations algé-

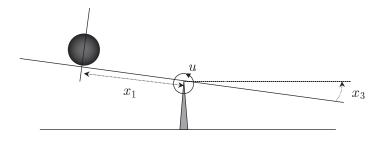


Figure 3.10 – Bille sur une barre

briques non linéaires en p. Ici aussi, si la période d'échantillonnage est suffisamment petite, la procédure de résolution peut être initialisée proche d'une solution.

La figure 3.11, montre le comportement du système bouclé sans perturbation et avec une perturbation intervenant à l'instant $t=1.25\,s$ et correspondant à un ajout de $0.1\,ms^{-1}$ à la vitesse de la bille sur la barre. La dimension de la base a été prise égale à $N_F:=5$, l'inconnue p est donc de dimension $N_F-n_{L_F}-n_{L_D}=2$, ce qui correspond au nombre de conditions finales à forcer. Les états du système rejoignent l'origine au bout d'un temps de $5\,s$ alors que l'horizon est de $t_f=3\,s$. Comme précédemment, cet écart est dû aux approximations résultantes de la projection sur la base fonctionnelle.

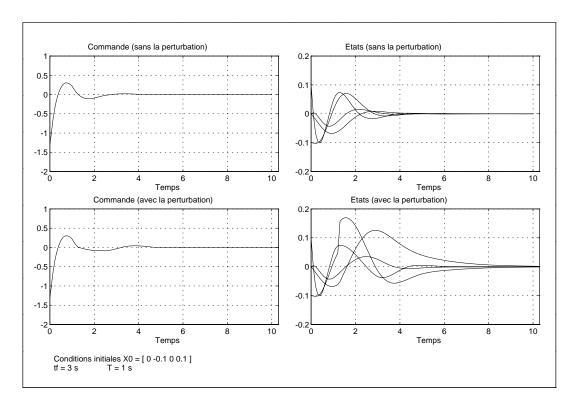


Figure 3.11 – Bille sur une barre

3.3.5.4 Contrôle de l'attitude d'un satellite à deux moteurs

La commande de l'attitude d'un satellite, c'est à dire position et orientation, en n'utilisant que deux commandes est un problème classique en non linéaire. La contrôlabilité d'un tel système a été établie par Bonnard [1982] et Crouch [1984] dès lors que l'axe non commandé n'est pas un axe de symétrie du satellite. Nous supposerons naturellement que tel est notre cas. L'étude de la stabilisabilité et la conception de retours d'état stabilisants est plus récente. En effet, le système complet (vitesse angulaire-position) est plus délicat que le système réduit qui peut être stabilisé par un retour d'état \mathcal{C}^{∞} : comme l'a noté Byrnes et Isidori [1991], le système global ne vérifie pas la première des conditions de Brockett et donc n'est pas stabilisable par un retour d'état \mathcal{C}^1 . Crouch [1984] a proposé un

algorithme basé sur la théorie algébrique de Lie aboutissant à une commande constante par morceaux qui stabilise le satellite autour de l'origine. Cette approche a été simplifiée par Krishnan et al. [1992] dont la commande consiste en manœuvres successives. Dans un travail récent, Keraï [1995] établit que le système à deux commandes satisfait une condition suffisante de contrôlabilité en "temps petit" et en utilisant le fait que la plupart des systèmes contrôlables en temps petit sont stabilisables par un retour d'état temps variant \mathcal{C}^1 [Coron, 1995], on sait que le satellite à deux moteurs est stabilisable par retour d'état temps variant. C'est par ce moyen que Morin et al. [1995], Morin et Samson [1997] puis Coron et Keraï [1996] stabilisent ce système.

L'orientation du satellite peut être décrite en utilisant diverses paramétrisations du groupe orthogonal SO(3). Ce sont les angles d'Euler qui seront utilisés par la suite [Wittenburg, 1977].

Soit un repère F_s fixe par rapport au référentiel satellite et dont les axes correspondent aux principaux axes d'inertie du satellite. Soit F_f un repère fixe par rapport au référentiel terrestre dans lequel est exprimée l'attitude du satellite. Soit :

- $-\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, les vitesses angulaires du repère F_s (donc du satellite) par rapport au repère F_f (ω est exprimé dans le repère F_s)
- $-\varphi$, θ et ψ les angles d'Euler ou angles de rotation donnant F_s à partir de F_f (exprimés dans le repère F_f).

Avec les notations précédentes, les équations du satellite à deux commandes sont les suivantes :

$$\dot{\omega_1} = u_1 \tag{3.3.49a}$$

$$\dot{\omega_2} = u_2 \tag{3.3.49b}$$

$$\dot{\omega_3} = a\omega_1\omega_2 \tag{3.3.49c}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta \tag{3.3.49d}$$

$$\dot{\theta} = \tan \varphi \left(\omega_1 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta \right) + \omega_2 \tag{3.3.49e}$$

$$\dot{\psi} = -(\cos\varphi)^{-1} \left(\omega_1 \sin\theta - \omega_3 \cos\theta\right) \tag{3.3.49f}$$

où $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3)$ est la matrice d'inertie et : $a = \frac{J_1 - J_2}{J_3}$.

Les équations (3.3.49d) et (3.3.49e) donnent, en substituant dans l'équation (3.3.49c), le système triangulaire équivalent sous forme normale ci-dessous avec $z_F := (\theta \varphi)^T$ et $z_D := (\omega_3 \omega_1 \omega_2 \psi u_1 u_2)^T$:

$$g_1(\theta)\dot{\omega}_3 + g_2(\theta,\varphi)\omega_3^2 + g_3(\theta,\dot{\theta},\varphi,\dot{\varphi})\omega_3 + g_4(\theta,\dot{\theta},\varphi,\dot{\varphi}) = 0 \qquad (\to \omega_3)$$

$$\dot{\varphi} - \omega_1 \cos(\theta) - \omega_3 \sin(\theta) = 0 \tag{\Rightarrow } \omega_1$$

$$\omega_2 - \dot{\theta} + \tan \varphi \left(\omega_1 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta \right) = 0 \tag{$\Rightarrow \omega_2$}$$

$$\dot{\psi}\cos\varphi + \omega_1\sin\theta - \omega_3\cos\theta = 0 \tag{\Rightarrow} \psi$$

$$\dot{\omega_1} - u_1 = 0 \tag{\rightarrow } u_1)$$

$$\dot{\omega_2} - u_2 = 0 \tag{\rightarrow } u_2)$$

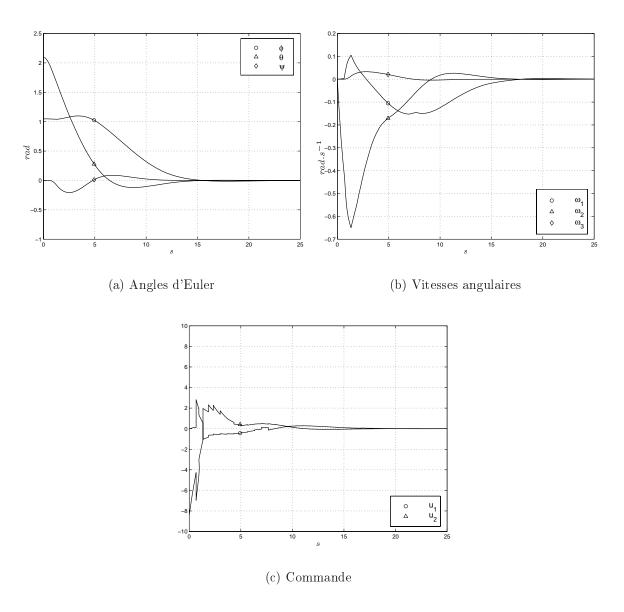


Figure 3.12 – Satellite à deux moteurs

avec:

$$g_1(\theta) = \cos^2(\theta)$$

$$g_2(\theta, \varphi) = a \sin(\theta) \tan(\varphi)$$

$$g_3(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = a \left(-\dot{\varphi} \tan(\varphi) + \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) - \dot{\varphi} \tan(\varphi) \sin^2(\theta) \right)$$

$$g_4(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = a \left(-\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\theta) + \dot{\varphi}^2 \tan(\varphi) \sin(\theta) \right)$$

 z_F est constitué de deux états, donc les conditions aux limites nous donnent $n_{L_F}=4$. L'intégration du système sur l'horizon de prédiction impose la résolution :

- d'une équation aux moindres carrés non linéaire pour obtenir ω₃. Cette résolution est de loin la plus coûteuse en terme de temps de calcul. Cependant, une méthode de Newton peut ici être appliquée. Cette méthode est rarement utilisée car elle fait intervenir le jacobien et le hessien de l'équation à résoudre par rapport à l'inconnue qui sont rarement disponibles. On lui préfère généralement la méthode de Gauss-Newton qui ne fait intervenir que le jacobien. Dans notre cas, ils peuvent être analytiquement calculés. On peut ainsi obtenir une convergence plus rapide sur un rayon plus grand autour de la solution [Dennis et Schnabel, 1983]. Le gain ainsi obtenu atteint jusqu'à un facteur 20. Le temps nécessaire à cette "intégration" est de l'ordre de 5 centièmes de seconde sous MATLAB (une version compilée permettrait d'accélérer encore le calcul), ce qui est nettement plus rapide qu'une intégration utilisant une routine de type ODE.
- de trois équations aux moindres carrés linéaires afin d'obtenir ω_1 , ω_2 et ψ .
- deux équations algébriques triviales pour obtenir u_1 et u_2

Une fois le vecteur de paramètres p connu, l'intégration du système ne nécessite la résolution par la méthode de Newton que d'une équation non linéaire pour obtenir ω_3 et de cinq équations matricielles linéaires. En conséquence, la recherche d'une trajectoire (ou de manière équivalente d'un paramètre p) ramenant le système à l'origine se résume à la résolution de six équations non linéaires en p.

La figure 3.12, montre le comportement du système bouclé. La dimension de la base est $N_F := 6$. Le nombre d'inconnues est donc de $2N_F - n_{L_F} = 8$. Les valeurs numériques utilisées sont celles du satellite SPOT4 présentées dans le tableau 2.2.

Enfin, afin de tester numériquement la robustesse de la méthode, nous avons introduit une erreur de

- 10\% sur a, simulant ainsi une incertitude sur les moments d'inertie
- 5 degrés sur la mesure de θ simulant une erreur de capteur

Le régulateur se comporte convenablement en ramenant la totalité des vitesses angulaires à l'origine et les angles d'Euler dans un voisinage de l'origine. Le rayon de ce voisinage est de l'ordre de grandeur de l'erreur de lecture imposée à θ . On remarquera qu'une erreur sur θ est la situation la moins favorable à la méthode proposée car elle se répercutera sur les composantes de z_D .

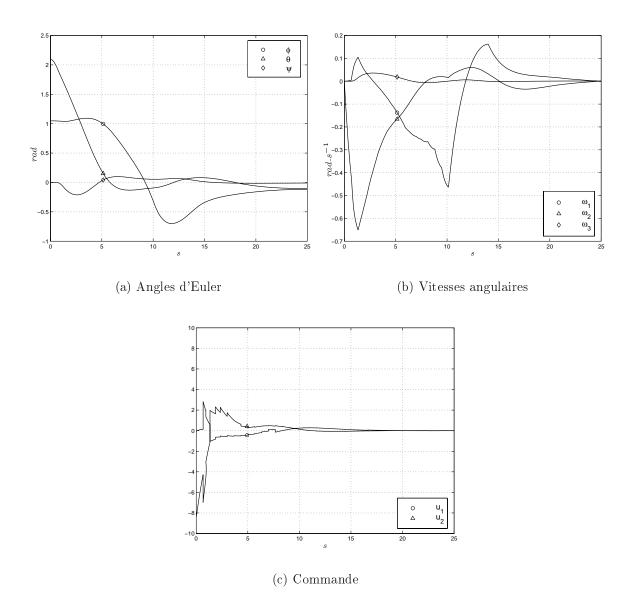


Figure 3.13 – Satellite à deux moteurs avec incertitudes

3.4 Conclusion

Ce chapitre, dans lequel nous avons étudié les relations qu'il y a entre les trajectoires en boucle ouverte et un éventuel retour d'état, s'articule en deux paragraphes principaux. Le premier, plus théorique, traite du lien entre la contrôlabilité asymptotique et la stabilisabilité. Nous avons montré qu'un système asymptotiquement contrôlable était stabilisable par un retour d'état de type continu-discret. Dans un second paragraphe, nous nous sommes plus intéressé à caractériser des propriétés des trajectoires en boucle ouverte permettant la conception d'un retour d'état simple. Une condition a été mise en évidence puis traduite numériquement. Nous avons traité de nombreux exemples, dont notamment le problème de contrôle de l'attitude d'un satellite à deux moteurs. Les résultats, tant sur le plan de l'efficacité numérique que sur le plan de la robustesse de la méthode sont satisfaisants.

Deuxième partie

Contribution à l'observation des systèmes non linéaires implicites

Chapitre 1

Synthèse d'observateur pour une classe de systèmes implicites

1.1 Introduction

Le problème d'observation, bien que présentant quelques similitudes, est un problème distinct de celui de la commande. Il consiste à estimer l'état x d'un système dynamique à partir de la sortie et, lorsqu'il s'agit d'un système commandé, de l'entrée. Ce problème se rapproche d'un problème de commande dans la mesure où, si on appelle e l'erreur entre l'état x du système et son estimation \hat{x} , l'objectif est de construire un observateur rendant la dynamique de l'erreur e asymptotiquement stable. Cependant, contrairement au cas linéaire, l'observation et la stabilisation des systèmes non linéaires ne sont pas deux problèmes duals et l'observation possède des spécificités propres. Par conséquent, nous consacrons le premier paragraphe, aux notions de bases attenantes à la théorie de l'observabilité, à savoir la distinguabilité et l'observabilité. Ces notions sont les équivalents des notions d'atteignabilité et de contrôlabilité en commande exposées au chapitre 1.

Les observateurs permettant la reconstruction des états sont souvent associés aux retours d'état en vue de la stabilisation. Cet association, parfois appelée retour de sortie pose certains problèmes, dans lesquels nous ne rentrerons pas ici. Nous nous limiterons à exposer succinctement dans le paragraphe 1.2.3 la notion d'observateur pour, ensuite, nous appesantir un peu plus sur un observateur particulier : l'observateur à grand gain.

Notre intérêt s'est porté sur les systèmes dynamiques dont une partie de l'état s'exprime en fonction des autres états au travers d'une relation implicite. Notre contribution à ce domaine est le sujet du paragraphe 1.3. S'apparentant à des systèmes dont la dynamique est contrainte sur une variété, nous verrons qu'un observateur à grand gain classique sur ce genre de systèmes une sensibilité structurelle aux erreurs diverses qui peuvent intervenir et faire "sortir" le système de la variété. Nous proposons donc une modification de la structure de l'observateur à grand gain afin de l'adapter au cas des systèmes évoluant sur une variété de manière à rendre cette dernière localement exponentiellement attractive vis à vis des trajectoires.

1.2 Quelques notions préliminaires sur les observateurs

1.2.1 introduction

Nous allons ici exposer les différentes notions classiques liées à l'observation des systèmes non linéaires; l'objectif étant d'amener la notion qui nous intéressera plus particulièrement, à savoir l'uniforme observabilité, et de la situer parmi les différents aspects de l'observabilité. La classe des systèmes considérée dans cette présentation est celle des systèmes non linéaires sous la forme entrée/sortie suivante :

$$\Sigma_0: \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$
 (1.2.1)

où, $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ est la commande et $y \in \mathbb{R}^m$ est la sortie du système, avec \mathcal{X} , un ouvert de \mathbb{R}^n , \mathcal{U} un ensemble mesurable de \mathbb{R}^p . On suppose que, pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$ et commande $u \in \mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^p}$, la solution $x(.; x_0, t_0, u)$ existe sur un intervalle (éventuellement infini) $[t_0, t_0 + T_{max}]$.

L'observabilité du système Σ_0 exprime la possibilité de reconstruire, à partir de simple la connaissance des évolutions de la sortie y et de la commande u sur un intervalle de temps suffisamment long $[t_0, t_0 + T[\subset [t_0, t_0 + T_{max}]]$, la valeur de l'état x à l'instant t_0 .

Nous commencerons par exposer succinctement certaines notions de la théorie de l'observation, comme la distinguabilité et l'observabilité, qui mettrons en évidence le rôle de l'entrée. Cela nous permettra d'introduire alors la notion d'observabilité uniforme, en particulier pour les systèmes affines en la commande, qui nous intéressent plus spécifiquement ici. Nous présenterons ensuite quelques résultats sur le observateurs à proprement parler.

1.2.2 Observabilité des systèmes

1.2.2.1 Observabilité

Les différentes notions de base, qui suivent, on été largement développées par Hermann et Krener [1977]. Elles sont la base de la théorie de l'observation et sont les équivalents de l'atteignabilité et des différentes notions de contrôlabilité présentées dans le chapitre 1. Étant donné le système Σ_0 , on définit :

Définition 1.2.1 (distinguabilité). Soit x_0^1 et x_0^2 , deux états initiaux distincts. S'il existe un temps t et une entrée $u:[0,t] \to \mathcal{U}$, tels que $y(t;x_0^1,u) \neq y(t;x_0^2,u)$ avec, pour tout $\tau \in [0,t]$, $x(\tau;x_0^1,u)$ et $x(\tau;x_0^2,u)$ dans \mathcal{X} , alors, x_0^1 et x_0^2 seront dits distinguables dans \mathcal{X} .

Il est alors possible de définir l'observabilité en un point et, par extension, l'observabilité. Ces notions sont les équivalents des notions

Définition 1.2.2 (observabilité en un point). Le système Σ_0 est dit observable en $x_0 \in \mathcal{X}$, si pour tout $x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$, x et x_0 sont distinguables dans \mathcal{X} .

Définition 1.2.3 (observabilité locale en un point). Le système Σ_0 est dit localement observable en $x_0 \in \mathcal{X}$, si, pour tout voisinage ouvert $\mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{X}$ et tout point $x \in \mathcal{V}(x_0) \setminus \{x_0\}$, le couple (x_0, x) est distinguable dans \mathcal{X} .

Définition 1.2.4 (observabilité locale). Le système Σ_0 est dit localement observable sur \mathcal{X} , si il est localement observable en tout point de \mathcal{X} .

Tout comme la contrôlabilité locale en un point est une propriété plus faible que la contrôlabilité locale, l'observabilité locale en un point est une propriété plus faible que l'observabilité locale.

Définition 1.2.5 (observabilité faible en un point). Le système Σ_0 est dit faiblement observable en $x_0 \in \mathcal{X}$, s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{X}$ tel que, pour tout point $x \in \mathcal{V}(x_0) \setminus \{x_0\}$, le couple (x_0, x) est distinguable dans $\mathcal{V}(x_0)$.

Définition 1.2.6 (observabilité locale faible en un point). Le système Σ_0 est dit localement faiblement observable en $x_0 \in \mathcal{X}$, s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{X}$ tel que, pour tout voisinage $\mathcal{V}'(x_0)$ et tout point $x \in \mathcal{V}'(x_0) \setminus \{x_0\}$, le couple (x_0, x) est distinguable dans $\mathcal{V}'(x_0)$.

Définition 1.2.7 (observabilité locale faible). Le système Σ_0 est localement faiblement observable sur \mathcal{X} s'il est localement faiblement observable en tout point de \mathcal{X} .

Les deux notions principales dans les définitions ci-dessus sont l'observabilité locale et l'observabilité locale faible. La première signifie en quelque sorte qu'il est possible de distinguer deux condition initiales "au bout d'un certain temps". La seconde implique au contraire qu'autour de chaque point $x_0 \in \mathcal{X}$, il existe des voisinages aussi petits que l'on veut tels que tous les points de ces voisinages soient distinguables : en d'autres termes, il s'agit d'une "distinguabilité instantanée".

Tout comme la contrôlabilité locale, l'observabilité locale faible peut se traduire sous forme d'une condition géométrique dite **condition de rang**, analogue à celle que l'on peut obtenir dans le cas des systèmes linéaires. Nous ne développerons pas ces aspects dans ce mémoire. On pourra se référer aux ouvrages traitants de ces aspects [Isidori, 1995; Nijmeijer et Van der Schaft, 1990].

1.2.2.2 Observabilité uniforme

Dans les définitions précédente, la distinguabilité découle de l'existence d'une commande rendant distinctes deux sorties correspondant à deux états initiaux distincts. Cette définition est, dans la pratique, relativement inutilisable dans la mesure où, dans la plupart des cas, le choix de la commande n'est pas libre. L'exemple suivant montre qu'une commande peut "masquer" une partie du comportement de l'état. Cela nous amènera aux notions d'entrée universelle et d'uniforme observabilité.

Exemple 1.2.1.

Le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$
 (1.2.2)

est observable. Pourtant, si u := 0, il est impossible de distinguer deux conditions initiales $x_0^1 := {\alpha \choose \beta}$ et $x_0^2 := {\alpha \choose \delta}$.

Pour palier à ce problème, on définit :

Définition 1.2.8 (entrée universelle). Une entrée $u:[0,T] \to \mathcal{U}$ est dite entrée universelle pour le système Σ_0 sur l'intervalle [0,T] si, pour tout couple (x_0^1, x_0^2) , d'états initiaux distincts, il existe au moins un instant t pour lequel $y(t; x_0^1, u) \neq y(t; x_0^2, u)$. Une entrée non universelle sera dite singulière.

Définition 1.2.9 (*U***-uniforme observabilité).** *Un système dont toutes les entrées considérées sont universelles est dit U***-uniforme observable**.

Si dans l'exemple 1.2.1, on considère $\mathcal{U} := \mathbb{R}^p$, le système (1.2.2), bien qu'observable en tout point, n'est pas \mathcal{U} -uniforme observable. Par contre, si on choisit $\mathcal{U} := \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, il devient \mathcal{U} -uniforme observable. L'uniforme observabilité sur un espace \mathcal{X} permet de caractériser un ensemble d'entrées pour lesquelles le système est observable.

Si on considère un système monosortie affine en la commande de la forme suivante :

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^p u_i g_i(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$
 (1.2.3)

où les champs f, g_i et h sont supposés \mathcal{C}^{∞} , les travaux de Gauthier et Bornard [1981] montrent que :

Théorème 1.2.1 (Gauthier et Bornard [1981]). Si le système Σ_1 est \mathbb{R}^p - uniformément observable, alors :

1. L'application:

$$\phi: x \rightarrow (h(x), L_f(h)(x), \dots, L_f^{n-1}(h)(x))$$

est un difféomorphisme local sur un voisinage de presque tout point de \mathbb{R}^n avec, rappelons le, $L_f(h)(x)$ est un opérateur de différentiation appelée dérivée de Lie et définie par :

$$L_f(h)(x) := \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)$$
 (1.2.4a)

$$L_f^k(h)(x) := L_f(L_f^{k-1}h)(x)$$
 (1.2.4b)

2. En posant $\xi = \phi(x)$, le système (1.2.3) s'écrit sous la forme canonique Γ_1 suivante :

$$\Gamma_1: \begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + \tilde{f}(\xi) + \sum_{i=1}^p u_i \tilde{g}_i(\xi) \\ y = C\xi \end{cases}$$

où:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{f}_n(\xi) \end{pmatrix}$$
 (1.2.5)

$$\tilde{g}_{i}(\xi) = \begin{pmatrix}
\tilde{g}_{i_{1}}(\xi_{1}) \\
\tilde{g}_{i_{2}}(\xi_{1}, \xi_{2}) \\
\vdots \\
\tilde{g}_{i_{n}}(\xi_{1}, \xi_{2}, \dots, \xi_{n})
\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.6}$$

Comme le système Γ_1 est uniformément observable, la forme canonique est une condition nécessaire et suffisante d'uniforme observabilité. On peut trouver une preuve simplifiée dans Gauthier et al. [1992].

Lorsque le système n'est pas affine en la commande, la caractérisation de l' \mathcal{U} -uniforme observabilité peut se faire par l'étude de la structure géométrique des espaces d'observation lorsque l'on applique des entrées constantes dans \mathcal{U} [Hammouri et al., 1997]. Nous n'entrerons pas, ici, dans les détails.

Que le système soit affine en la commande ou non, il n'existe pas de caractérisation de l'uniforme observabilité des systèmes multisorties. Seules des conditions suffisantes de structures ont été données par Bornard et Hammouri [1991]

1.2.3 Observateurs des systèmes non linéaires

1.2.3.1 Forme générale

Un observateur est un système dynamique qui permet de reconstruire l'état d'un système observé de la forme (1.2.1). La forme la plus générale de l'observateur est la suivante :

$$\mathcal{O}: \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{z} & = & \bar{f}(z,u,y) \\ \hat{x} & = & \bar{h}(z) \end{array} \right.$$

où, z est un état interne à l'observateur dans une variété différentiable \mathbb{M} , u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système observé (1.2.1) et \hat{x} , estimation de l'état x du système, est la sortie du système \mathcal{O} .

Définition 1.2.10 (observateur). Le système \mathcal{O} est

- Un observateur asymptotique local si il existe x_0 et un voisinage $\mathcal{V}(x_0)$ tels que :

$$\lim_{t \to \infty} \|\hat{x}(t; x(0), u) - x(t; z(0), u, y)\| = 0$$

pour tout $x(0) \in \mathcal{V}(x_0)$ et tout $z(0) \in \bar{h}^{-1}(\mathcal{V}(x_0))$.

 $-\ Un\ observateur\ asymptotique\ global\ si:$

$$\lim_{t \to \infty} \|\hat{x}(t; x(0), u) - x(t; z(0), u, y)\| = 0$$

pour tout $x(0) \in \mathcal{X}$ et tout $z(0) \in \bar{h}^{-1}(\mathcal{X})$.

Comme on le constate dans la définition ci-dessus, seule une attractivité (locale ou globale) de x(t; x(0), u) sur la sortie de l'observateur \mathcal{O} est requise. En pratique, la stabilité est utile pour éviter des excursions trop grandes de \hat{x} et bien souvent, on cherche à obtenir un observateur exponentiellement stable :

Définition 1.2.11 (observateur exponentiel). Dans les deux cas de la définition 1.2.10, l'observateur est dit exponentiel s'il existe deux réels strictement positifs λ et μ tels que, pour tout $t \geq 0$, on ait :

$$\|\hat{x}(t;x(0),u) - x(t;z(0),u,y)\| \le \mu \|\bar{h}(z(0)) - x(0)\| e^{-\lambda t}$$

La structure d'observateur la plus communément utilisée sur les systèmes de la forme (1.2.1) est la suivante :

$$\mathcal{O}: \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\hat{x}} & = & f(\hat{x}, u) - G(\zeta)(h(\hat{x}) - y) \\ \dot{\zeta} & = & \varphi(\hat{x}, u, y, \zeta) \end{array} \right.$$

où G est appelé gain de l'observateur. L'observateur est en fait constitué de la dynamique du système auquel on a ajouté un terme de correction dépendant de l'erreur d'observation $h(\hat{x}) - y$.

Parmi les observateurs, nous ne développerons ici que l'observateur à grand gain. Citons parmi les autres grandes classes d'observateurs, les observateurs de Luenberger pour les systèmes linéaires, et les observateurs de Kalman.

1.2.3.2 Les observateurs à grand gain

Les observateurs à grand gains sont relativement classiques en observation des systèmes non linéaires. Ils doivent leur nom au fait que le gain d'observation est choisi suffisamment grand pour compenser la non linéarité du système. Nous exposerons ici en grande partie la démarche établissant la convergence exponentielle de l'observateur sous certaines hypothèses. Ce travail a été initialement établi par Gauthier et al. [1992]. Notre contribution à la conception d'observateurs a consisté à généraliser l'observateur à grand gain au cas des systèmes partiellement implicites ; il nous a donc semblé important de détailler cette partie.

a. Hypothèses

Les observateurs à grand gain auxquels nous nous intéressons ici, s'appliquent à des systèmes non linéaires monosortie affines en la commande de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i g_i(x)$$
 (1.2.7a)

$$y = h(x) (1.2.7b)$$

où x évolue dans une variété différentiable \mathbb{M} de \mathbb{R}^n .

Hypothèses 1.2.2. On suppose que le système (1.2.7) vérifie les hypothèses suivantes :

- 1. Il existe deux compacts $K_0 \subset K \subset \mathbb{M}$ et un réel u_m tel que pour $x_0 \in K_0$ et toute commande $u \in \mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^p}$ vérifiant $\operatorname{esssup}_{t \in \mathbb{R}^+} \|u(t)\| \leq u_m$, les trajectoires $x(.; x_0, u)$ du système (1.2.7) restent dans K.
- 2. L'application:

$$\phi: x \to (h(x), L_f(h)(x), \dots, L_f^{n-1}(h)(x))^T$$
 (1.2.8)

est un difféomorphisme d'un ouvert borné Ω de \mathbb{M} contenant K dans $\phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$.

3. Pour i = 0, ..., n - 1, et j = 1, ..., p, on a:

$$dL_{g_j}L_f^i(h) \wedge dL_f^i(h) \wedge dL_f^{i-1}(h) \wedge \cdots \wedge dh = 0$$

où ∧ désigne le produit extérieur.

Un système uniformément observable satisfera, conformément au théorème 1.2.1, les conditions 1.2.2.(2) et 1.2.2.(3) et réciproquement. La condition 1.2.2.(3) est une traduction mathématique de la forme triangulaire de l'équation (1.2.6).

Le système (1.2.7) s'écrit donc, après le changement de coordonnées (1.2.8) sous la forme :

$$\dot{\xi} = A\xi + \tilde{f}(\xi) + \sum_{i=1}^{p} u_i \tilde{g}_i(\xi)$$
 (1.2.9)

$$y = C\xi \tag{1.2.10}$$

où A, C et les champs \tilde{f} et \tilde{g}_i ont les structures données par les équations (1.2.5) et (1.2.6).

b. Extension global lipschitz du système

Le problème qui se pose alors, est, qu'afin de compenser la partie non linéaire du système, il est nécessaire que les champs \tilde{f} et \tilde{g}_i soient globalement lipschitz. Or, cette condition n'est pas a priori satisfaite. L'étape suivante va donc consister à prolonger le système initial (1.2.7) de sorte à obtenir un système (1.2.15), ayant le même comportement que le système (1.2.7) sur le compact K mais dont les champs sont globalement lipschitz.

Cette étape utilise l'hypothèse 1.2.2.(1), à savoir que l'état du système est supposé évoluer dans un compact K de la variété M.

Rappelons que l'on appelle support d'une fonction χ , l'ensemble $\{x; \chi(x) \neq 0\}$. On le note Supp(χ).

Soient Ω_j et K_j les ensembles bornés suivants :

$$\Omega_j := \left\{ \left(h(x), L_f(h)(x), \dots, L_f^{j-1}(h)(x) \right); \quad x \in \Omega \right\} \subset \mathbb{R}^j$$

$$K_j := \left\{ \left(h(x), L_f(h)(x), \dots, L_f^{j-1}(h)(x) \right); \quad x \in K \right\} \subset \mathbb{R}^j$$

et $\chi_j : \mathbb{R}^j \to [0,1]$, des fonctions scalaire \mathcal{C}^{∞} de support $\mathrm{Supp}(\chi_j) \subset \Omega_j$, telles que :

$$\chi_j(\xi_1, \dots, \xi_j) = 1 \quad \text{si } (\xi_1, \dots, \xi_j) \in K_j$$
 (1.2.11)

Définissons alors les champs f_e et g_e de la manière suivante :

$$\begin{cases}
L_{f_e}\left(L_f^i(h)\right) = L_f^{i+1}(h) & \text{pour } 0 \leq i \leq n-2 \\
L_{f_e}\left(L_f^{n-1}(h)\right) = \chi_n(h, \dots, L_f^{n-1}(h))L_f^n(h)
\end{cases} \\
\begin{cases}
i \in \{1, \dots, p\}, \ j \in \{1, \dots, n\} \\
L_{g_{e_i}}(L_f^{j-1}(h)) = \chi_j(h, \dots, L_f^{j-1}(h))L_{g_i}(L_f^{j-1}(h))
\end{cases} (1.2.12)$$

$$\begin{cases}
 i \in \{1, \dots, p\}, \ j \in \{1, \dots, n\} \\
 L_{g_{e_i}}(L_f^{j-1}(h)) = \chi_j(h, \dots, L_f^{j-1}(h)) L_{g_i}(L_f^{j-1}(h))
\end{cases}$$
(1.2.13)

Les champs f_e et g_{e_i} sont bien uniquement déterminés par les équations (1.2.12) et (1.2.13), car elles peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{x} f_{e}(x) = \begin{pmatrix}
L_{f}(h)(x) \\
\vdots \\
L_{f}^{n-1}(h)(x) \\
\chi_{n}(h(x), \dots, L_{f}^{n-1}(h)(x)) L_{f}^{n}(h)(x)
\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{x} g_{e}(x) = \begin{pmatrix}
\chi_{1}(h(x)) L_{g_{i}}(h)(x) \\
\chi_{2}(h(x), L_{f}(h)(x)) L_{g_{i}}(L_{f}(h))(x) \\
\vdots \\
\chi_{n}(h(x), \dots, L_{f}^{n-1}(h)(x)) L_{g_{i}}(L_{f}^{n-1}(h))(x)
\end{pmatrix} (1.2.14)$$

et on vérifie aisément que sur Ω , et donc sur le compact K, les champs f_e et g_{e_i} sont respectivement confondus avec les champs f et g_i .

On peut donc considérer le système :

$$\dot{x} = f_e(x) + \sum_{i=1}^p u_i g_{e_i}(x)$$
 (1.2.15a)

$$y = h(x) \tag{1.2.15b}$$

Après le changement de coordonnées $\xi = \phi(x)$, le système (1.2.15) s'écrit, sous la forme canonique :

$$\dot{\xi} = A\xi + \tilde{f}_e(\xi) + \sum_{i=1}^p u_i \tilde{g}_{e_i}(\xi)$$
 (1.2.16a)

$$y = C\xi \tag{1.2.16b}$$

avec A et C donnés par les équations (1.2.5)-(1.2.6) et :

$$\tilde{f}_{e}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \chi_{n}(\xi)\tilde{f}_{n}(\xi) \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_{e_{i}}(\xi) = \begin{pmatrix} \chi_{1}(\xi_{1})\tilde{g}_{i_{1}}(\xi_{1}) \\ \chi_{2}(\xi_{1}, \xi_{2})\tilde{g}_{i_{2}}(\xi_{1}, \xi_{2}) \\ \vdots \\ \chi_{n}(\xi)\tilde{g}_{i_{n}}(\xi_{1}, \xi_{2}, \dots, \xi_{n}) \end{pmatrix}$$
(1.2.17)

où les fonctions \tilde{f}_{e_j} et $\tilde{g}_{e_{ij}}$ sont \mathcal{C}^{∞} à support compact et donc globalement lipschitz en leurs arguments.

c. L'observateur à grand gain

Tous les éléments sont désormais en place pour montrer le théorème suivant :

Théorème 1.2.3 (Gauthier et al. [1992]). Si le système (1.2.7) vérifie les hypothèses 1.2.2, alors l'observateur:

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + \tilde{f}_e(\hat{\xi}) + \sum_{i=1}^p u_i \tilde{g}_e(\hat{\xi}) - S_\theta^{-1} C^T (C\hat{\xi} - y)$$
 (1.2.18)

où S_{θ} est la matrice symétrique définie positive solution de l'équation algébrique de Ricatti :

$$\theta S_{\theta} + A^T S_{\theta} + S_{\theta} A = C^T C \tag{1.2.19}$$

est, pour θ suffisamment grand, exponentiel pour le système (1.2.16), quelque soit l'entrée u vérifiant l'hypothèse 1.2.2.(1).

Dans le système de coordonnées d'origine, l'observateur (1.2.18) s'écrit sous la forme :

$$\dot{\hat{x}} = f_e(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p u_i g_e(\hat{x}) - \Phi_{\star}(\hat{x})^{-1} S_{\theta}^{-1} C^T (h(\hat{x}) - y)$$
(1.2.20)

Dans le cas où M est un ouvert de \mathbb{R}^n , Φ_{\star} s'exprime sous la forme :

$$\Phi_{\star}(x) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x}$$

Dans le cas où $\mathbb M$ est une variété au sens général, il est nécessaire de doter $\mathbb M$ d'un système de coordonnées approprié pour expliciter Φ_{\star} .

d. Preuve du théorème 1.2.3

Malgré l'extension du système légèrement différente de celle effectuée habituellement, la preuve donnée ici est identique à celle proposée par Gauthier et al. [1992]. Soient $e = \hat{\xi} - \xi$ et $\varepsilon = \Delta_{\theta} e$ où $\Delta_{\theta} := \operatorname{diag}(\frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^n})$. La dynamique de ε s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \theta \left(A - S_1^{-1} C^T C \right) \varepsilon + \Delta_{\theta} \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, u) - \Lambda_e(\xi, u) \right)$$

où on a posé $S_1 = S_\theta$ avec $\theta = 1$, et :

$$\Lambda_{e}(\xi, u) := \begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{p} u_{i} \tilde{g}_{e_{i_{1}}}(\xi) \\
\sum_{i=1}^{p} u_{i} \tilde{g}_{e_{i_{2}}}(\xi) \\
\vdots \\
\left[\tilde{f}_{e_{n}}(\xi) + \sum_{i=1}^{p} u_{i} \tilde{g}_{e_{i_{n}}}(\xi)\right]
\end{pmatrix} (1.2.21)$$

On remarquera que comme \tilde{f}_e et \tilde{g}_{e_i} sont globalement lipschitz et que les commandes sont uniformément bornées, Λ_e est également globalement lipschitz.

En posant $V := \varepsilon^T S_1 \varepsilon$, on obtient :

$$\dot{V} = 2\varepsilon^{T} S_{1} \dot{\varepsilon}
= 2\varepsilon^{T} S_{1} \left[\theta \left(A - S_{1}^{-1} C^{T} C \right) \varepsilon + \Delta_{\theta} \left(\Lambda_{e}(\hat{\xi}, u) - \Lambda_{e}(\xi, u) \right) \right]
= -\theta V - \varepsilon^{T} C^{T} C \varepsilon + 2\varepsilon^{T} S_{1} \Delta_{\theta} \left(\Lambda_{e}(\hat{\xi}, u) - \Lambda_{e}(\xi, u) \right)
\leq -\theta V + 2\sqrt{V} \sqrt{\left[\Delta_{\theta} \left(\Lambda_{e}(\hat{\xi}, u) - \Lambda_{e}(\xi, u) \right) \right]^{T} S_{1} \left[\Delta_{\theta} \left(\Lambda_{e}(\hat{\xi}, u) - \Lambda_{e}(\xi, u) \right) \right]}$$
(1.2.22)

En utilisant la structure triangulaire de Λ_e et le fait qu'elle soit global lipschitz, on peut montrer que :

$$\sqrt{\left[\Delta_{\theta}\left(\Lambda_{e}(\hat{\xi}, u) - \Lambda_{e}(\xi, u)\right)\right]^{T} S_{1}\left[\Delta_{\theta}\left(\Lambda_{e}(\hat{\xi}, u) - \Lambda_{e}(\xi, u)\right)\right]} \leq k \|\varepsilon\| \\
\leq \frac{k}{\lambda_{\min}(S_{1})} \sqrt{V}$$

où k est une constante ne dépendant pas de θ et $\lambda_{\min}(S_1)$ est la plus petite valeur propre de S_1 . L'inégalité (1.2.22) devient donc :

$$\dot{V} \leq -\left(\theta - \frac{2k}{\lambda_{\min}(S_1)}\right)V$$

Cette dernière inégalité nous donne clairement la convergence exponentielle de V si θ est choisi suffisamment grand, faisant de l'observateur (1.2.18), un observateur exponentiel du système (1.2.7).

1.3 Synthèse d'observateur pour les systèmes implicites

Nous allons ici présenter notre contribution à la conception d'observateurs pour les systèmes partiellement implicites. Ce problème se traduit en fait comme un problème d'observation d'un système évoluant sur une variété. Le premier paragraphe a pour objectif de présenter quelques solutions possibles à ce problème et notamment le grand gain sur lequel nous nous pencherons plus en détail. Cette présentation nous amènera à souligner les problèmes attenants à ces solutions. Le second paragraphe est consacré à l'observateur proposé et à la preuve de sa convergence.

1.3.1 Position du problème

Nous nous intéressons maintenant aux systèmes non linéaires partiellement implicites de la forme :

$$\begin{cases}
\dot{x} = f_0(x,\rho) + \sum_{i=1}^p u_i f_i(x,\rho) \\
y = h(x,\rho) \\
\varphi(x,\rho) = 0
\end{cases}$$
(1.3.1)

où $(x, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ et les champs f_i sont supposés \mathcal{C}^{∞} . Soit :

$$\mathbb{M} := \{ (x, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, \text{ tels que} : \varphi(x, \rho) = 0 \}$$
 (1.3.2)

On suppose que l'application $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est \mathcal{C}^{∞} et vérifie :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{x,\rho}$$
 de rang plein en tout point de M (1.3.3)

En pratique, l'intégration de tels systèmes nécessite l'utilisation de méthodes permettant d'expliciter φ . Cela peut prendre par exemple la forme d'une routine de type ODE couplée avec une procédure d'optimisation. Quelque soit la méthode utilisée, l'hypothèse (1.3.3) est nécessaire. Elle signifie uniquement que, pour x donné, l'équation $\varphi(x,\rho)=0$ admet localement une solution ρ unique (on pourra se référer au théorème des fonctions implicites).

On suppose que le système (1.3.1) vérifie les hypothèses 1.2.2. Sous les hypothèses cidessus, \mathbb{M} est une variété de dimension n, plongée dans \mathbb{R}^{n+d} ; la théorie des observateurs à grand gain exposée au paragraphe 1.2.3.2 peut s'appliquer.

En posant $z := {x \choose \rho}$, le système (1.3.1) peut s'écrire, en terme dévolution sur la variété M, sous la forme :

$$\begin{cases}
\dot{z} = F_0(z) + \sum_{i=1}^p u_i F_i(z) \\
y = h(z) \\
z \in \mathbb{M}
\end{cases}$$
(1.3.4)

avec :

$$F_{i}(z) := \begin{pmatrix} f_{i}(x,\rho) \\ -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{x,\rho}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{x,\rho}\right) f_{i}(x,\rho) \end{pmatrix} \qquad 0 \le i \le p$$

$$(1.3.5)$$

Similairement à ce que nous avons fait dans le paragraphe 1.2.3.2.b, nous pouvons prolonger les champs F_i de manière à les rendre global lipschitz sur la variété M. On appelle F_{e_i} ces champs étendus. Le système (1.3.4) a, sur le compact K, le même comportement dynamique que le système :

$$\begin{cases}
\dot{z} = F_{e_0}(z) + \sum_{i=1}^{p} u_i F_{e_i}(z) \\
y = h(z) \\
z \in \mathbb{M}
\end{cases}$$
(1.3.7)

Après le changement de coordonnées :

$$\xi := \phi(z) = (h(z), L_{F_0}(h)(z), \dots, L_{F_0}^{n-1}(h)(z))^T \in \mathbb{R}^n$$

le système (1.3.7) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases}
\dot{\xi} = A\xi + \tilde{F}_{e_0}(\xi) + \sum_{i=1}^{p} u_i \tilde{F}_{e_i}(\xi) \\
y = C\xi
\end{cases} (1.3.8)$$

D'après le théorème 1.2.1, un observateur à grand gain pour le système (1.3.8) est :

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + \tilde{F}_{e_0}(\hat{\xi}) + \sum_{i=1}^{p} u_i \tilde{F}_{e_i}(\hat{\xi}) - S_{\theta}^{-1} C^T (C\hat{\xi} - y)$$
(1.3.9)

Dans le système de coordonnées d'origine, l'observateur (1.3.9) devient :

$$\dot{\hat{z}} = F_{e_0}(\hat{z}) + \sum_{i=1}^{p} u_i F_{e_i}(z) - \Phi_{\star}(\hat{z})^{-1} S_{\theta}^{-1} C^T(h(\hat{z}) - y)$$
(1.3.10)

En notant que x est un système de coordonnée de la variété \mathbb{M} , on peut calculer que :

$$\Phi_{\star}(z)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big|_{z}\right)^{-1}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\big|_{z}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\big|_{z}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big|_{z}\right)^{-1}} \end{pmatrix}$$

et en explicitant x et ρ dans l'équation (1.3.10) on obtient :

$$\begin{cases}
\dot{\hat{x}} = f_{e_0}(\hat{x}, \hat{\rho}) + \sum_{i=1}^{p} u_i f_{e_i}(\hat{x}, \hat{\rho}) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right)^{-1} S_{\theta}^{-1} C^T(h(\hat{x}, \hat{\rho}) - y) \\
\dot{\hat{\rho}} = g_{e_0}(\hat{x}, \hat{\rho}) + \sum_{i=1}^{p} u_i g_{e_i}(\hat{x}, \hat{\rho}) \\
+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right)^{-1} S_{\theta}^{-1} C^T(h(\hat{x}, \hat{\rho}) - y)
\end{cases} (1.3.11)$$

La convergence de l'observateur (1.3.11) n'est garantie que si \hat{z} évolue sur la variété M. Or $\hat{\rho}$ est obtenu en intégrant "en boucle ouverte" sur la variété; en effet, on a :

$$\dot{\hat{\rho}} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{\hat{x},\hat{\rho}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{\hat{x},\hat{\rho}}\right) \dot{\hat{x}}$$

Par conséquent, l'observateur (1.3.11) ne sera pas robuste vis à vis :

- des erreurs d'initialisation
- d'incertitudes de modèle

qui risquent de se propager et amener \hat{z} à s'éloigner le la variété \mathbb{M} . Sur la figure 1.1 est représentée une trajectoire $\hat{z}_{(1.3.11)}(.;z'_0,u)$ typique de ce qui peut survenir avec l'observateur (1.3.11) si l'initialisation se fait en $z'_0 \notin \mathbb{M}$, proche de $z_0 \in \mathbb{M}$.

Une alternative consisterait à utiliser des méthodes d'optimisation pour inverser ponctuellement φ et ainsi forcer \hat{z} à rester sur la variété. Par exemple, on peut se fixer une période d'échantillonnage T et estimer x entre kT et (k+1)T en utilisant l'observateur :

$$\begin{cases}
\dot{\hat{x}} = f_{e_0}(\hat{x}, \hat{\rho}(kT)) + \sum_{i=1}^{p} u_i f_{e_i}(\hat{x}, \hat{\rho}(kT)) \\
-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}(kT)}\right)^{-1} S_{\theta}^{-1} C^T(h(\hat{x}, \hat{\rho}(kT)) - y) \\
\varphi(\hat{x}(kT), \hat{\rho}(kT)) = 0
\end{cases} (1.3.12)$$

On répète ensuite ce schéma à chaque instant d'échantillonnage. Ici aussi, les erreurs résultants du fait que ρ est considéré constant sur les intervalles [kT,(k+1)T[, peuvent faire diverger un tel observateur, bien que \hat{z} reste sur la variété (ou tout du moins dans un voisinage proche). C'est ce qu'illustre la trajectoire $\hat{z}_{(1.3.12)}(.;z_0,u)$ représentée sur la figure 1.1.

Quelque soit la méthode utilisée, on ne peut garantir la convergence de l'observateur. Notre objectif a donc consisté a modifier l'observateur (1.3.11) afin de le "robustifier" dans un voisinage de la variété M afin de garantir une convergence pour toute initialisation dans un voisinage tubulaire de celle-ci. C'est ce point que nous développons au paragraphe 1.3.2 ci-dessous.

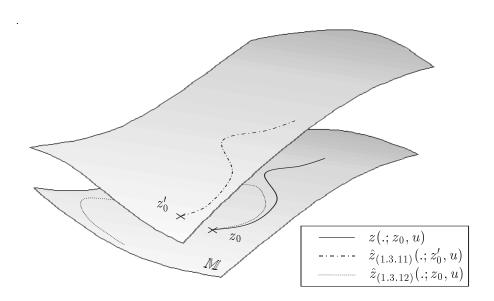


Figure 1.1 – Divergence des observateurs sur les systèmes implicites

1.3.2 Un observateur à grand gain pour une classe de systèmes implicites

Rappelons que nous considérons ici le système :

$$\begin{cases}
\dot{x} = f_0(x,\rho) + \sum_{i=1}^p u_i f_i(x,\rho) \\
y = h(x,\rho) \\
\varphi(x,\rho) = 0
\end{cases}$$
(1.3.13)

où $(x,\rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, les champs f_i sont supposés \mathcal{C}^{∞} et la variété $\mathbb{M} := \{(x,\rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, \ \varphi(x,\rho) = 0\}$ est telle que $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$ est inversible en tout point de \mathbb{M} :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{x,\rho}$$
 de rang plein en tout point de M (1.3.14)

En terme d'évolution sur la variété, le système (1.3.13) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases}
\dot{z} = F_0(z) + \sum_{i=1}^p u_i F_i(z) \\
y = h(z) \\
z \in \mathbb{M}
\end{cases}$$
(1.3.15)

où les champs F_i sont donnés par les équations (1.3.5).

1.3.2.1 Hypothèses et énoncé du résultat

Hypothèses 1.3.1. On suppose que le système (1.3.13) vérifie les hypothèses suivantes :

- 1. Il existe deux compacts $K_0 \subset K \subset \mathbb{M}$ et un réel u_m tel que pour $z_0 \in K_0$ et toute commande $u \in \mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}^p}$ vérifiant $\operatorname{esssup}_{t \in \mathbb{R}^+} \|u(t)\| \leq u_m$, les trajectoires $z(.; z_0, u)$ du système (1.3.13) restent dans K.
- 2. L'application:

$$\phi: z \to (h(z), L_{F_0}(h)(z), \dots, L_{F_0}^{n-1}(h)(z))^T$$

est un difféomorphisme d'un ouvert borné Ω contenant K de la variété dans $\phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$.

3. Pour $j=0,\ldots,n-1,\ i=1,\ldots,p,\ on\ a,\ sur\ la\ variété\ \mathbb{M}$:

$$dL_{F_0}L_{F_0}^j(h) \wedge dL_{F_0}^j(h) \wedge dL_{F_0}^{j-1}(h) \wedge \cdots \wedge dh = 0$$

où ∧ désigne le produit extérieur.

Remarque 1.3.1. Les hypothèses 1.3.1.(2) et 1.3.1.(3) traduisent l'uniforme observabilité du système sur la variété M.

L'hypothèse 1.3.1.(2) associée au théorème des fonctions implicites nous donne l'existence d'un voisinage tubulaire $T_{\mathbb{M}}$ de la variété \mathbb{M} tel que le changement de coordonnées :

$$\check{\phi}: z \rightarrow (h(z), L_{F_0}(h)(z), \dots, L_{F_0}^{n-1}(h)(z), \varphi(z))^T$$

soit un difféomorphisme de $T_{\mathbb{M}}$ dans un ouvert de \mathbb{R}^{n+d} . La figure 1.2 illustre ce changement de coordonnées.

Pour $j \in \{1, ..., n\}$, on rappelle que :

$$\Omega_j := \left\{ \left(h(z), L_{F_0}(h)(z), \dots, L_{F_0}^{j-1}(h)(z) \right), \quad z \in \Omega \right\}$$

$$K_j := \left\{ \left(h(z), L_{F_0}(h)(z), \dots, L_{F_0}^{j-1}(h)(z) \right), \quad z \in K \right\}$$

et que les fonctions χ_j sont des fonctions scalaires \mathcal{C}^{∞} de support $\operatorname{Supp}(\chi_j)$ inclus dans Ω_j et valant 1 sur K_j . On prolonge les champs F_i de manière à les rendre lipschitz en posant :

$$\frac{\partial \breve{\phi}}{\partial z} \Big|_{z} F_{e_{0}}(z) = \begin{pmatrix} L_{F_{0}}(h)(z) \\ \vdots \\ L_{F_{0}}^{n-1}(h)(z) \\ \chi_{n}(h(z), \dots, L_{F_{0}}^{n-1}(h)(z)) L_{F_{0}}^{n}(h)(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

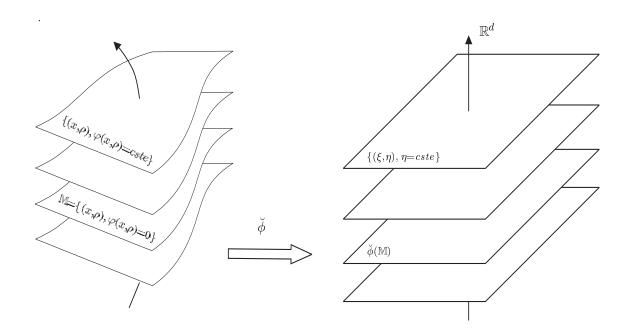


Figure 1.2 – Illustration du difféomorphisme $\check{\phi}$

$$\left. \frac{\partial \breve{\phi}}{\partial z} \right|_{z} F_{e_{i}}(x) = \begin{pmatrix} \chi_{1}(h(z))L_{F_{i}}(h)(z) \\ \chi_{2}(h(z), L_{F_{0}}(h)(z))L_{F_{i}}(L_{F_{0}}(h))(z) \\ \vdots \\ \chi_{n}(h(z), \dots, L_{F_{0}}^{n-1}(h)(z))L_{F_{i}}(L_{F_{0}}^{n-1}(h))(z) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors considérer le système équivalent sur le compact K:

$$\begin{cases}
\dot{z} = F_{e_0}(z) + \sum_{i=1}^{p} u_i F_{e_i}(z) \\
y = h(z) \\
z \in \mathbb{M}
\end{cases}$$
(1.3.16)

qui, après le changement de coordonnées $\varsigma:=\check{\phi}(z),$ s'écrit :

$$\begin{cases}
\dot{\xi} = A\xi + \tilde{f}_{e_0}(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^{p} u_i \tilde{f}_{e_i}(\xi, \eta) \\
\dot{\eta} = 0 \\
y = C\xi
\end{cases}$$
(1.3.17)

où:

- on a $\zeta = {\xi \choose \eta}$, avec $\xi := (h(z), L_{F_0}(h)(z), \dots, L_{F_0}^{n-1}(h)(z))^T$ et $\eta := \varphi(z)$,
- Les matrices A et C ont les structures (1.2.5) et (1.2.6),
- on a posé:

$$ilde{f}_{e_0}(arsigma) := \left(egin{array}{c} 0 \ & dots \ 0 \ & L_{F_0}^n(h)(\phi^{-1}(arsigma)) \end{array}
ight)$$

– par l'hypothèse 1.3.1.(2), les champs \tilde{f}_{e_i} ont, dès lors que ς est sur la variété, la structure triangulaire suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \ \forall \varsigma \in \mathbb{M},$$
$$\tilde{f}_{e_{ij}}(\varsigma) = \tilde{f}_{e_{ij}}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_j)$$
(1.3.18)

Avec les différentes définitions et notations précédentes, notre résultat est le suivant :

Théorème 1.3.2. Si le système (1.3.13) vérifie les hypothèses 1.3.1, alors, pour tout compact \hat{K}_0 de \mathbb{R}^{n+d} , il existe θ et Ω tel que, pour toute initialisation $\hat{\varsigma}_0 = (\hat{\xi}_0, \hat{\eta}_0)$ dans $\hat{K}_0 \cap T_{\mathbb{M}}$, le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + \tilde{f}_{e_0}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) + \sum_{i=1}^{p} u_i \tilde{f}_{e_i}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) - S_{\theta}^{-1} C^T (C\hat{\xi} - y) \\ \dot{\hat{\eta}} = -\Omega \hat{\eta} \end{cases}$$
(1.3.19)

soit un observateur exponentiel du système (1.3.17), quelque soit l'entrée u vérifiant l'hypothèse 1.3.1.(1) et avec S_{θ} solution de l'équation algébrique de Ricatti :

$$\theta S_{\theta} + A^T S_{\theta} + S_{\theta} A = C^T C \tag{1.3.20}$$

Dans le repère d'origine, l'observateur (1.3.19) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases}
\dot{\hat{x}} = f_{e_0}(\hat{x}, \hat{\rho}) + \sum_{i=1}^{p} u_i f_{e_i}(\hat{x}, \hat{\rho}) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right)^{-1} S_{\theta}^{-1} C^T(h(\hat{x}, \hat{\rho}) - y) \\
\dot{\hat{\rho}} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right) \left[f_{e_0}(\hat{x}, \hat{\rho}) + \sum_{i=1}^{p} u_i f_{e_i}(\hat{x}, \hat{\rho})\right] - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right)^{-1} \Omega \varphi(\hat{x}, \hat{\rho}) (1.3.21) \\
+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}, \hat{\rho}}\right)^{-1} S_{\theta}^{-1} C^T(h(\hat{x}, \hat{\rho}) - y)
\end{cases}$$

Remarque 1.3.2. L'observateur (1.3.21) ne fait intervenir que le jacobien du difféomorphisme ϕ , et par conséquent, il n'impose aucunement d'expliciter la relation $\varphi(x,\rho)=0$.

1.3.2.2 Preuve du théorème 1.3.2

Comme dans le cas du grand gain, la preuve fait appel à des arguments de type Lyapounov. On pose à nouveau $e = \hat{\xi} - \xi$ et $\varepsilon = \Delta_{\theta} e$ avec $\Delta_{\theta} := \operatorname{diag}(\frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^n})$. Soient :

$$V_1 := \varepsilon^T S_1 \varepsilon, \quad V_2 := \eta^T \Omega \eta \quad \text{et} \quad V = V_1 + V_2$$

On alors:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2
= 2\varepsilon^T S_1 \left[\theta (A - S_1^{-1} C^T C) \varepsilon + \Delta_\theta \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}, u) - \Lambda_e(\xi, 0, u) \right) \right] - 2\hat{\eta}^T \Omega \eta
= -\theta V_1 - \varepsilon C^T C \varepsilon + 2\varepsilon^T S_1 \Delta_\theta \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}, u) - \Lambda_e(\xi, 0, u) \right) - 2\hat{\eta}^T \Omega \eta$$
(1.3.22)

avec:

$$\Lambda_e(\xi, \eta, u) := \tilde{f}_{e_0}(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^p u_i \tilde{f}_{e_i}(\xi, \eta)$$

Le problème ici est que λ_e n'a la structure triangulaire ailleurs que sur la variété. Autant on sait que l'état $\binom{\xi}{0}$ du système évolue sur la variété, autant on ne peut supposer de même pour $\binom{\hat{\xi}}{\hat{\eta}}$. En écrivant :

$$\Lambda_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}, u) - \Lambda_e(\xi, 0, u) = \Lambda_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}, u) - \Lambda_e(\xi, 0, u) + \Lambda_e(\hat{\xi}, 0, u) - \Lambda_e(\hat{\xi}, 0, u)$$

l'inégalité (1.3.22) devient :

$$\dot{V} = -\theta V_1 - \varepsilon C^T C \varepsilon + 2\varepsilon^T S_1 \Delta_\theta \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, 0, u) - \Lambda_e(\xi, 0, u) \right)
-2\hat{\eta}^T \Omega \eta + 2\varepsilon^T S_1 \Delta_\theta \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}, u) - \Lambda_e(\hat{\xi}, 0, u) \right)
\leq \inf_{\substack{\text{inégalité de Schwartz}}} -\theta V_1 + 2\sqrt{V_1} \sqrt{\left[\Delta_\theta \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, 0, u) - \Lambda_e(\xi, 0, u) \right) \right]^T S_1 \left[\Delta_\theta \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, 0, u) - \Lambda_e(\xi, 0, u) \right) \right]}
-2V_2 + 2\sqrt{V_1} \sqrt{\left[\Delta_\theta \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}, u) - \Lambda_e(\hat{\xi}, 0, u) \right) \right]^T S_1 \left[\Delta_\theta \left(\Lambda_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}, u) - \Lambda_e(\hat{\xi}, 0, u) \right) \right]} (1.3.23)$$

Les points $\binom{\xi}{0}$ et $\binom{\hat{\xi}}{0}$ sont sur la variété. En conséquence, en utilisant :

- la structure triangulaire (1.3.18),
- le fait que les commandes sont uniformément bornées de par l'hypothèse 1.3.1.(1),
- le fait que par construction des champs F_{e_i} , $(\xi_1, \ldots, \xi_j) \to \Lambda_{e_j}(\xi_1, \ldots, \xi_j, u)$ sont globalement lipschitz en (ξ_1, \ldots, ξ_j)

on obtient, exactement comme dans le cas de l'observateur à grand gain classique présenté au paragraphe 1.2.3.2.d page 112 :

$$\sqrt{\left[\Delta_{\theta}\left(\Lambda_{e}(\hat{\xi},0,u)-\Lambda_{e}(\xi,0,u)\right)\right]^{T}S_{1}\left[\Delta_{\theta}\left(\Lambda_{e}(\hat{\xi},0,u)-\Lambda_{e}(\xi,0,u)\right)\right]} \leq k \|\varepsilon\| \\
\leq \frac{k}{\lambda_{\min}(S_{1})}\sqrt{V_{1}} \qquad (1.3.24)$$

1.4. Conclusion 121

Tant que la fonction de Lyapounov V est décroissante et comme ς reste dans le compact $\check{\phi}(K)$, $\hat{\varsigma}$ reste également dans un compact \hat{K} de \mathbb{R}^{n+d} qui dépend de K et de la valeur de V à l'initialisation. En conséquence, on a :

$$\sqrt{\left[\Delta_{\theta}\left(\Lambda_{e}(\hat{\xi},\hat{\eta},u)-\Lambda_{e}(\hat{\xi},0,u)\right)\right]^{T}S_{1}\left[\Delta_{\theta}\left(\Lambda_{e}(\hat{\xi},\hat{\eta},u)-\Lambda_{e}(\hat{\xi},0,u)\right)\right]} \leq \lambda_{\max}(S_{\theta})k' \|\hat{\eta}\| \\
\leq \frac{k'\lambda_{\max}(S_{\theta})}{\lambda_{\min}(\Omega)}\sqrt{V_{2}} \qquad (1.3.25)$$

En utilisant les inégalités (1.3.24) et (1.3.25) dans l'inégalité (1.3.23), on obtient :

$$\dot{V} \leq -\left(\theta - \frac{2k}{\lambda_{\min}(S_1)}\right)V_1 - 2V_2 + \frac{2k'\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(\Omega)}\sqrt{V_1}\sqrt{V_2}$$
(1.3.26)

Il suffit alors de choisir θ tel que $\theta - \frac{2k}{\lambda_{\min}(S_1)} =: \delta > 0$, puis $\Omega = \omega I$ avec ω vérifiant :

$$\omega \geq \frac{k' \lambda_{\max}(S_{\theta})}{\sqrt{2\delta}}$$

pour garantir que:

$$\dot{V} \leq -\left(\sqrt{\delta V_1} + \sqrt{2V_2}\right)^2 \\
\leq \min(\delta, 2) \left(\sqrt{V_1} + \sqrt{V_2}\right)^2 \\
\leq \min(\delta, 2) V$$

Cette dernière inégalité nous permet de conclure à la convergence exponentielle de l'observateur.

Enfin, on retrouve la forme (1.3.21) simplement en appliquant $\check{\phi}^{-1}$ et en remarquant que :

$$\hat{\eta} = \varphi(\hat{x}, \hat{\rho})$$

et, par conséquent :

$$\dot{\hat{\rho}} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{\hat{x},\hat{\rho}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{\hat{x},\hat{\rho}}\right) \dot{\hat{x}} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\Big|_{\hat{x},\hat{\rho}}\right)^{-1} \Omega \varphi(\hat{x},\hat{\rho})$$

1.4 Conclusion

Après un bref paragraphe rappelant les principales définitions et résultats, nous avons souligné les problèmes survenant lorsque les observateurs classiques étaient appliqués à des systèmes évoluant dans une variété plongée. Ce cas recouvre celui des systèmes dont une partie de l'état est donnée par une relation implicite reliant les états entre eux. Partant uniquement d'une hypothèse d'uniforme observabilité sur la variété, nous proposons

un observateur de type grand gain permettant d'estimer les états du système sans expliciter la relation implicite. Cet observateur possède à la fois une convergence semi-globale dans les directions "parallèles" à la variété et un attractivité exponentielle dans un voisinage tubulaire de la variété. Les performances de l'observateur à grand gain sont ainsi conservées tout en augmentant la robustesse du schéma vis à vis d'éventuelles erreurs ou perturbations.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans la première partie ce mémoire, nous avons présenté nos résultats portant sur la stabilisation des systèmes non linéaires et notamment sur le lien entre contrôlabilité et stabilisabilité asymptotique.

Après un premier chapitre de rappels sur la théorie de la stabilité au sens de Lyapounov et les notions de contrôlabilité et de stabilisabilité, nous présentons dans le second chapitre une loi de commande stabilisante pour les systèmes non linéaires affines en la commande. Basée sur une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman à contrainte d'inégalité finale, la loi de commande prend la forme d'un retour d'état dynamique discontinu. Notre approche est une alternative aux méthodes habituellement utilisées (principalement les retours d'état temps variant) pour stabiliser les systèmes ne vérifiant pas les conditions de Brockett.

Des simulations sur des exemples ont été effectuées, notamment sur un système ne vérifiant pas les conditions de Brockett et, par conséquent, non stabilisable par un retour d'état \mathcal{C}^1 .

Dans le second chapitre, nous nous sommes plus spécifiquement intéressés à la relation existant entre les trajectoires en boucle ouverte, telles que les états du systèmes tendent asymptotiquement vers l'origine, et la possibilité éventuelle de réaliser un retour d'état stabilisant. Ce travail se scinde en deux parties principales.

Dans la première, nous avons construit, à partir d'une simple hypothèse de contrôlabilité asymptotique, un retour d'état stabilisant. Le schéma adopté est le continu discret. Notre approche donne un résultat similaire à celui obtenu par Clarke et al. [1997]. Il présente cependant l'avantage d'aboutir, pour une période d'échantillonnage fixée, à une stabilisation asymptotique, alors que l'approche proposée par Clarke et al. [1997] et basée sur les fonctions de Lyapounov, ne peut garantir, dans ce cas, qu'une stabilisation pratique.

Dans la seconde partie, nous nous intéressés à certaines conditions des trajectoires en boucle ouverte qui permettent, lorsqu'elles sont vérifiées, de construire un retour d'état stabilisant. Pour une classe de systèmes non linéaires, incluant, notamment, les systèmes différentiellement plats et les systèmes chaînés, nous proposons une stabilisation numérique basée sur les conditions précédentes. Sur les systèmes appartenant à cette classe, on peut exhiber une structure triangulaire qui permet une implémentation numérique effi-

cace par rapport aux autres techniques basées sur l'horizon fuyant. Cette méthode nous a permis, entre autres, de stabiliser l'attitude d'un satellite dont à seulement deux moteurs.

Les suites à donner à se travail sont multiples. Tout d'abord, il serait intéressant de stabiliser par le retour d'état présenté au chapitre 2 un système non stabilisable par un retour d'état continu car rien n'indique que cela ne soit pas faisable. Plus généralement, la conception de retours d'état dynamiques (continus ou non) reste largement à explorer. En effet, l'apport d'une dynamique, bien connue dans le cas des retours de sortie où elle sert à la reconstruction de l'état (observateur), est peu utilisée pour un objectif de stabilisation. Ensuite, il semblerait intéressant d'explorer la robustesse, aussi bien, du retour d'état (3.2.14) proposé dans la première partie du chapitre, que de la méthode numérique proposée en seconde partie. Tous les deux semblent pouvoir tirer une certaine robustesse de la continuité du champ f. Ce point là reste à approfondir.

La seconde partie de ce travail a porté sur l'observation des systèmes non linéaires partiellement implicites. Ce problème est en fait un problème d'observation d'un système dont les états évoluent sur une variété. Une généralisation de l'observateur à grand gain pour ce genre de systèmes a été donnée. Elle garantit la convergence de l'observateur en particulier dans le cas où l'initialisation ne se fait pas exactement sur la variété, ce qui n'est pas le cas de l'observateur à grand gain classique. Elle permet également d'éviter d'expliciter la relation implicite.

Les suites à donner à cette partie portant sur l'observation sont multiples. Tout d'abord, il semble nécessaire de réaliser quelques simulations sur des exemples plus ou moins académiques afin de mieux appréhender le comportement de cet observateur. Ensuite, il semble être relativement simple de transposer ce résultat à la commande. D'une manière plus générale, il pourrait intéressant de préciser comment l'impliciticité pourrait être une manière de prendre en compte des contraintes dans la conception d'une loi de commande, comme par exemple la commande optimale.

Annexe A

Preuve du lemme 3.2.4

Rappelons que cette preuve se déroule en quatre points de la manière suivante :

- 1. Dans un premier temps, nous allons établir que le système (A.0.1) admet une stratégie de commande stabilisante bornée v à partir du moment où il est asymptotiquement contrôlable.
- 2. Ceci nous permettra, pour tout R > 0, de définir une fonction "gabarit" Λ_R , vérifiant les points (3), (4) et (5) du lemme 3.2.4.
- 3. Ensuite, en fixant $\bar{R}=R$, le lemme de Massera [1949, lemme 12] nous donnera une fonction G, vérifiant le point (1) du lemme 3.2.4. et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(\Lambda_{\bar{R}}(\tau))d\tau$ converge.
- 4. Pour conclure, nous vérifierons que, pour tout R, l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(\Lambda_R(\tau))d\tau$ est effectivement convergente.

Existence de v:

En appliquant, le théorème 3.2.1, on sait qu'il existe un retour d'état κ pour lequel, pour tout R > r > 0, il existe M(R) > 0, T(R,r) > 0, $\delta(R,r)$ et une partition $\pi(R,r)$ de diamètre supérieur $\bar{d}(\pi) \leq \delta(R,r)$, tels que l'on ait :

- (trajectoire bornée) $\forall x \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq 0, \quad x_{\pi(R,r)}(t;x,\kappa) \in \mathcal{B}(M(R)),$
- (attractivité) $\forall x \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq T(R,r), \quad x_{\pi(R,r)}(t;x,\kappa) \in \mathcal{B}(r),$
- (stabilité) $\lim_{R\to 0} M(R) = 0$.

De plus, de par la remarque 3.2.1, pour tout compact \mathbb{X} de \mathbb{R}^n et tout $x \in \mathbb{X}$, $\kappa(x_{\pi(R,r)}(t;x,\kappa))$ est dans un compact $\mathbb{U}_{\rho(\mathcal{X})}$ ne dépendant que de \mathbb{X} .

Pour simplifier les notations, nous notons $\pi_x := \pi(\|x\|, \frac{\|x\|}{2})$, une partition telle que $\bar{d}(\pi_x) \leq \delta(\|x\|, \frac{\|x\|}{2})$. On définit la stratégie de commande suivante :

$$w(x,t) := \kappa (x_{\pi_x}(t_i; x, \kappa)) \qquad t \in [t_i, t_{i+1}]$$
 (A.0.1)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x(t; x, w(x, .)) = x_{\pi_x}(t; x, \kappa)$$
 pour tout $t \ge 0$

L'application de la stratégie de commande w au système donne une trajectoire en boucle ouverte x(t; x, w(x, .)) identique à la π -trajectoire en boucle fermée $x_{\pi_x}(t; x, \kappa)$. Pour tout x, on est donc assuré de rejoindre la boule $\mathcal{B}(\frac{\|x\|}{2})$ en en temps inférieur ou égal à $T(\|x\|, \frac{\|x\|}{2})$. On notera que w(x, .), bien que déduite d'une partition π_x , est une trajectoire en boucle ouverte ne faisant pas intervenir de partition. Pour obtenir une stratégie de commande bornée qui soit stabilisante, il reste donc à obtenir une attractivité de l'origine; pour cela, il suffit d'appliquer w de manière "répétitive".

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit :

$$x_0 := x$$

 $x_{k+1} := x (t_k(||x||); x_k, w(x_k, .))$

où on a posé:

$$t_k(||x||) := T(\frac{||x||}{2^k}, \frac{||x||}{2^{k+1}})$$
 (A.0.2)

 $t_k(||x||)$ est le temps nécessaire pour aller d'un état de norme $\frac{||x||}{2^k}$ à un état de norme inférieure à $\frac{||x||}{2^{k+1}}$. Soulignons que $t_k(||x||)$ n'a rien à voir avec une quelconque partition.

Pour tout $t \geq 0$ et tout R > 0, on définit alors k_R^t et T_R^t par :

$$k_R^t := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0(R) \\ \text{l'unique entier } k \text{ tel que :} \\ t \in] \sum_{j=0}^k t_j(R), \sum_{j=0}^{k+1} t_j(R)] \end{cases} \text{ si } t > t_0(R)$$
(A.0.3)

$$T_R^t := \begin{cases} 0 & \text{si } t \le t_0(R) \\ \sum_{j=0}^{k_R^t} t_j(R) & \text{si } t > t_0(R) \end{cases}$$
(A.0.4)

On définit alors la stratégie de commande v:

$$v(x,t) := \begin{cases} w(x,t) & \text{pour } t \le t_0(\|x\|) \\ w\left(x\left(T_{\|x\|}^t; x_{k_{\|x\|}^t}, v(x_{k_{\|x\|}^t}, .)\right), t - T_{\|x\|}^t\right) & \text{pour } t > t_0(\|x\|) \end{cases}$$
(A.0.5)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la commande en boucle ouverte v(x, .) donne à la trajectoire x(.; x, v(x, .)) l'allure générique représentée sur la figure A.1.

Notons que pour tout k, $\sum_{j=0}^k t_j(\|x\|)$ est le temps nécessaire pour aller de x à un état de norme inférieure à $\frac{\|x\|}{2^k}$ pour ne plus ressortir de la boule de rayon $M(\frac{\|x\|}{2^k})$.

On peut alors facilement vérifier que v est une stratégie de commande stabilisante bornée pour le système (A.0.1), ce qui nous donne le premier des quatre points constituant la preuve. Pour tout couple R > r > 0, il existe $M_v(R) := M(R) > 0$ et $T_v(R, r)$ tel que :

1.
$$\lim_{R \to 0} M_v(R) = \lim_{R \to 0} M(R) = 0$$
,

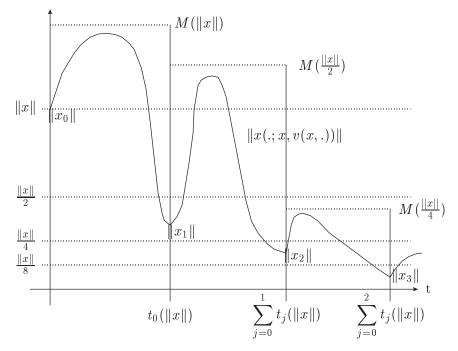


Figure A.1 – Comportement générique de x(.; x, v(x, .))

- 2. $\forall x \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq 0, \ x(t; x, v(x, .)) \in \mathcal{B}(M_v(R)) = \mathcal{B}(M(R)),$
- 3. $\forall x \in \mathcal{B}(R), \ \forall t \geq T_v(r,R), \ x(t;x,v(x,.)) \in \mathcal{B}(r).$

La suite en est une preuve. Soit n_R , le plus petit entier tel que $M(\frac{R}{2^{n_R}}) \leq r$. Similairement, pour tout $x \in \mathcal{B}(R) \setminus \mathcal{B}(\frac{R}{2^{n_R}})$, on définit n_x comme le plus petit entier tel que $M(\frac{\|x\|}{2^{n_x}}) \leq r$. On notera que $x \in \mathcal{B}(R)$ implique que $n_x \leq n_R$. Ainsi, on a :

$$\forall t \ge \sum_{j=0}^{n_x - 1} t_j(\|x\|), \qquad \|x(t; x, v(x, .))\| \le M(\frac{\|x\|}{2^{n_x}}) \le r$$

En remarquant que, toute trajectoire, issue d'une condition initiale dans $\mathcal{B}(\frac{R}{2^{n_R}})$, reste dans $\mathcal{B}(r)$, il suffit de borner $\sum_{j=0}^{n_x-1} t_j(||x||)$ pour $x \in \mathcal{B}(R) \setminus \mathcal{B}(\frac{R}{2^{n_R}})$ pour conclure :

$$\sum_{j=0}^{n_{x}-1} t_{j}(\|x\|) \stackrel{=}{\underset{(A.0.2)}{=}} \sum_{j=0}^{n_{x}-1} T\left(\frac{\|x\|}{2^{j}}, \frac{\|x\|}{2^{j+1}}\right) \\
\leq \sum_{j=0}^{n_{x}-1} T\left(R, \frac{R}{2^{n_{R}+1}}\right) = (n_{x}-1) T\left(R, \frac{R}{2^{n_{R}+1}}\right) \\
\leq (n_{R}-1) T\left(R, \frac{R}{2^{n_{R}+1}}\right) =: T_{v}(r, R) \tag{A.0.6}$$

On notera que $T_v(r,R)$ dépend de r au travers de n_R .

4. Pour tout compact \mathbb{X} de \mathbb{R}^n , la commande v(x,.) vérifiant les deux points précédents est dans un compact \mathbb{U} presque partout car le retour d'état κ vérifie cette propriété héritée du théorème 3.2.2.

On remarque que l'on obtient en fait le résultat suivant : un système asymptotiquement contrôlable est, en quelque sorte, "asymptotiquement fortement contrôlable". En effet, l'existence d'une stratégie de commande stabilisante bornée peut être interprétée comme une contrôlabilité asymptotique forte; il existe la même analogie entre les définitions 3.2.9 et 3.2.5 qu'entre les définitions 1.2.4 de la stabilité asymptotique forte et 1.2.3 de la stabilité asymptotique : dans les deux cas, c'est une propriété de bornitude uniforme de la trajectoire par rapport à la condition initiale qui est ajoutée.

Définition de Λ_R :

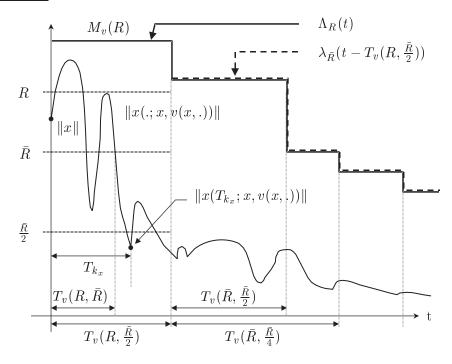


Figure A.2 – Illustration de la fonction Λ_R

La figure A.2 illustre la construction qui va suivre. Soit $\bar{R} > 0$, un rayon fixé. Soit la fonction $\lambda_{\bar{R}} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie de la manière suivante :

$$\lambda_{\bar{R}}(t) := \begin{cases} M_v(\bar{R}) & \text{pour } t \in \left[0, T_v\left(\bar{R}, \frac{\bar{R}}{2}\right)\right] \\ M_v\left(\frac{\bar{R}}{2^k}\right) & \text{pour } t \in \left]T_v\left(\bar{R}, \frac{\bar{R}}{2^k}\right), T_v\left(\bar{R}, \frac{\bar{R}}{2^{k+1}}\right)\right] \end{cases}$$
(A.0.7)

Comme, v est une stratégie de commande stabilisante bornée, pour tout $x \in \mathcal{B}(\bar{R})$ et $t \geq 0$, on a $x(t; x, v(x, .)) \in \mathcal{B}(\lambda_{\bar{R}}(t))$.

On étend à tout R > 0 en définissant la fonction Λ_R , par :

$$\Lambda_R: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+
t \to \begin{cases}
M_v(R) & \text{pour } t \in \left[0, T_v(R, \frac{\bar{R}}{2})\right] \\
\lambda_{\bar{R}}(t - T_v(R, \frac{\bar{R}}{2})) & \text{pour } t \ge T_v(R, \frac{\bar{R}}{2})
\end{cases} \quad \text{si } R > \bar{R} \quad (A.0.8)
t \to \min(M_v(R), \lambda_{\bar{R}}(t)) \quad \text{si } R \le \bar{R} \quad (A.0.9)$$

Pour tout $R \leq \bar{R}$ et $x \in \mathcal{B}(R)$, on sait que pour tout $t \geq 0$, $x(t; x, v(x, .)) \in \mathcal{B}(\lambda_{\bar{R}}(t))$. Mais également, par construction de v, que $x(t; x, v(x, .)) \in M_v(R)$. Ces deux éléments nous permettent donc de déduire que, pour tout $R \leq \bar{R}$, tout $x \in \mathcal{B}(R)$ et tout $t \geq 0$, on a $x(t; x, v(x, .)) \in \mathcal{B}(\Lambda_R(t))$.

Pour tout $R > \bar{R}$ et x dans le disque $\mathcal{D}(R, \bar{R})$, il existe un entier k_x tel que $T_{k_x} := \sum_{j=0}^{k_x} t_j(\|x\|) \in [T_v(R, \bar{R}), T_v(R, \frac{\bar{R}}{2})]$ et $x(T_{k_x}; x, v(x, .)) \in \mathcal{B}(\bar{R})$ (avec $t_k(\|x\|)$ défini par l'équation (A.0.2)). Or, par définition de v, on a :

$$\forall t \geq 0, \quad \|x\left(t; x\left(T_{k_x}; x, v(x, .)\right), v\left(x\left(T_{k_x}; x, v(x, .)\right), .\right)\right)\| \underset{(A.0.5)}{=} \|x\left(t + T_{k_x}; x, v(x, .)\right)\|$$

Par conséquent, pour tout $t \geq T_v(R, \frac{\bar{R}}{2})$, on a :

$$\begin{aligned} \|x\left(t;x,v(x,.)\right)\| & \leq & \lambda_{\bar{R}}(t-T_{k_x}) \\ & \leq & \lambda_{\bar{R}}\left(t-T_v\left(R,\frac{\bar{R}}{2}\right)\right) & \text{car } \lambda_{\bar{R}} \text{ est décroissante}\left(A.0.10\right) \end{aligned}$$

En combinant l'équation (A.0.10) avec le fait que pour tout $x \in \mathcal{B}(R)$ et tout $t \geq 0$, $x(t; x, v(x, .)) \in B(M_v(R))$, on obtient bien le point (5) du lemme 3.2.4 : pour tout R > 0, tout $x \in \mathcal{B}(R)$ et tout $t \geq 0$, on a $x(t; x, v(x, .)) \in \mathcal{B}(\Lambda_R(t))$.

La décroissance de Λ_R et le point (3) du lemme 3.2.4 sont évidentes. Le point (4) du lemme 3.2.4 découle directement du fait que, par construction, $\Lambda_R(0) \leq M_v(R)$ avec $\lim_{R\to 0} M_v(R) = 0$.

Obtention de G:

 $\lambda_{\bar{R}}$ est une fonction strictement positive telle que, pour tout $t \geq 0$, $\lim_{t \to \infty} \lambda_{\bar{R}}(t) = 0$ car $\lim_{R \to 0} M(R) = 0$. En appliquant le lemme de Massera [1949, lemme 12], il existe G de classe \mathcal{K} de dérivée g également de classe \mathcal{K} telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(\lambda_{\bar{R}}(\tau)) d\tau$ converge.

Convergence de l'intégrale $\int_0^\infty G(\Lambda_R(\tau))d\tau$:

Pour conclure, il suffit donc maintenant de vérifier que, **pour tout** R > 0, l'intégrale $\int_0^\infty G(\Lambda_R(\tau))d\tau$ est convergente.

Ce point est relativement immédiat car nous savons que $\int_0^{+\infty} G\left(\lambda_{\bar{R}}(\tau)\right) d\tau$ est convergente. Pour $R \leq \bar{R}$, $\Lambda_R(t) = \lambda_{\bar{R}}(t)$, on a également dans ce cas que l'intégrale $\int_0^{+\infty} G\left(\Lambda_R(\tau)\right) d\tau$ est convergente. Pour $R > \bar{R}$, on a :

$$\int_{0}^{+\infty} G\left(\Lambda_{R}(\tau)\right) d\tau = \int_{0}^{T_{v}(R,\frac{\bar{R}}{2})} G\left(\Lambda_{R}(\tau)\right) d\tau + \int_{T_{v}(R,\frac{\bar{R}}{2})}^{+\infty} G\left(\Lambda_{R}(\tau)\right) d\tau$$
$$= \int_{0}^{T_{v}(R,\frac{\bar{R}}{2})} G\left(\Lambda_{R}(\tau)\right) d\tau + \int_{0}^{+\infty} G\left(\lambda_{\bar{R}}(\tau)\right) d\tau$$

et donc, l'intégrale $\int_0^\infty G(\Lambda_R(\tau))d\tau$ est convergente, ce qui clos la preuve du lemme 3.2.4.

Annexe B

Principales notations utilisées dans la preuve du lemme 3.2.5

K	Retour d'état stabilisant proposé.	Lemme 3.2.5 page
		68
$N_1(r,R)$	Nombre d'instant d'échantillonnage tel que, pour	Équation $(3.2.28)$
	toute partition $\pi = (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\underline{d}(\pi) \geq \delta$,	page 72
	on ait $\bar{n}_{x_{\pi}(t_{i+N_1(r,R)};x,K)} > \bar{n}_{x_{\pi}(t_i;x,K)}$ dès lors que $x_{\pi}(t_i;x,K) \in \mathcal{D}(r,R)$.	
Γ	Primitive de G , s'annulant à l'origine.	Équation $(3.2.17)$
		page 69
n_R	$n_R := \inf_{x \in \mathcal{B}(R)} n_x$	Page 68
Λ_R	Fonction gabarit telle que, pour tout R , tout $x \in$	Équations (A.0.8)
	$ \mathcal{B}(R) $ et tout $t \geq 0$, $ x(t; x, v(x, .)) \leq \Lambda_R(t)$. Λ_R	et $(A.0.9)$ page
	est définie à partir de $\lambda_{ar{R}}$	130
m(r)	$m(r) := \inf\{m \in \mathbb{Z}; \ \mathcal{B}(M(\frac{C}{2^{m(r)}})) \subset \mathcal{B}(r)\}$	Équation (3.2.30) page 72
$\int_0^{+\infty} G(\Lambda_R(\tau)) d\tau$	Majorant de $W(x)$ dès lors que $x \in \mathcal{B}(R)$ et donc	Équation $(3.2.26)$
	en particulier si $x \in \mathcal{D}(r,R)$.	page 71
$W_{min}(r)$	Minorant de $W(x)$ dès lors que $x \notin \mathcal{B}(r)$ et donc	Équation $(3.2.27)$
	en particulier si $x \in \mathcal{D}(r,R)$	page 72
$T_{max}(r,R)$	Temps tel que, pour tout $t \geq T_{max}(r, R)$, on a :	Page 73
	$\Lambda_R(t) \le r$	

Bibliographie

- D. Aeyels. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control. Systems & Control Letters, 5:289–294, 1985.
- D. Aeyels et M. Szafranski. Comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body. Systems & Control Letters, 10:35–39, 1988.
- M. Alamir et G. Bornard. On the stability of receding horizon control of nonlinear discrete time systems. Systems & Control Letters, 23:291–296, 1994.
- M. Alamir et H. Khennouf. Discontinuous receding horizon based stabilizing strategy for nonholonomic systems in power form. Dans *Proc. American Control Conference*, pages 4300–4304, 1995.
- M. Alamir et N. Marchand. Numerical stabilization of nonlinear systems exact theory and approximate numerical implementation. *European Journal of Control*, 5(1):87–97, 1999.
- Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. Nonlinear Anal. Methods Theory Appl., 7:1163–1173, 1983.
- A. Astolfi. Discontinuous control of nonholonomic systems. Systems & Control Letters, 27:37–45, 1996.
- A. Bacciotti et L. Rosier. Liapunov and lagrange stability: inverse theorems for discontinuous systems. *Mathematics of Control, Signal and Systems*, 11:101–128, 1998.
- I. Balloul. Commande Robuste Des Systèmes Non Linéaires. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 18 janvier 2000.
- I. Balloul et M. Alamir. Robust stabilisation of nonlinear systems by disontinuous dynamic state feedback the numerical solution. Rapport technique 99.032, Lab. d'Automatique de Grenoble, 1999.
- M. Bensoubaya, A. Ferfera, et A. Iggidr. Stabilisation de systèmes non linéaires discrets. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Série I 321(3):371–374, 1995.
- B. Bonnard. Controle de l'attitude d'un satellite rigide. RAIRO Autom./Syst. Anal. Control, 16:85–93, 1982.
- G. Bornard et H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. Dans *Proc. IEEE conf. on Decision and Control*, Brighton, England, 1991.
- R. W. Brockett, R. S. Millmann, et H. S. Susmann. Asymptotic stability and feedback stabilization. Dans *Differential Geometric Control Theory*. Birkhauser, 1983.
- K. L. Buescher et C. C. Baum. A two-timescale approach to nonlinear model predictive control. Dans *Proc. American Control Conference*, pages 2250–2256, 1995.

C. I. Byrnes et A. Isidori. On the attitude stabilization of rigid spacecraft. *Automatica*, 27(1):87–95, 1991.

- F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, E. D. Sontag, et A. Subbotin. Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(10):1394–1407, 1997.
- J. M. Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Mathematics of Control, Signal and Systems*, 5:295–312, 1992.
- J. M. Coron. On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback laws. Siam Journal on Control and Optimization, 33:804–833, 1995.
- J. M. Coron et E. Y. Keraï. Explicit feedbacks stabilizing the attitude of a rigid spacecraft with two control torques. *Automatica*, 32(5):669–677, 1996.
- J. M. Coron et L. Praly. Adding an integrator for the stabilization problem. Systems & Control Letters, 17:89–104, 1991.
- P. E. Crouch. Spacecraft attitude control and stabilization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-29(4):321–331, 1984.
- J. E. Dennis et R. B. Schnabel. Numerical method for unconstrained optimization and nonlinear equations, chapter 10. Prentice Hall, 1983.
- A. F. Filippov. Differential equations with discontinuous righthand sides. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1988.
- M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, et P. Rouchon. On differentially flat nonlinear systems. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 315:619–624, 1992. Série I.
- M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, et P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61, 1995.
- M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, et P. Rouchon. Flat System: Theory and Practice. Summer School, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, September 1996.
- J. P. Gauthier et G. Bornard. Observability for any input of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 26(4):922–926, August 1981.
- J. P. Gauthier, H. Hammouri, et Othmann S. A simple observer for nonlinear systems. application to bioreactors. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(6):875–880, June 1992.
- W. Hahn. Stability of motion. Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong Kong, 1967.
- H. Hammouri, K. Busawon, et M. Farza. Nonlinear observer for local uniform observable systems. Rapport interne, LAGEP, 1997.
- J. Hauser, S. Sastry, et P. Kokotovic. Nonlinear control via approximated input-output linearization: the ball and beam example. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37: 392–398, 1992.
- R. Hermann et A. J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-22(5):728-740, 1977.
- A. Isidori. *Nonlinear control theory*. Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong Kong, 1995.

S. Kawaji et N. Matsunaga. Path generation using piecewise polynomials and its application to obstacle avoidance. Dans *Proc. IEEE conf. on Decision and Control*, pages 1–5, 1992.

- M. Kawski. Stabilization of nonlinear systems in the plane. Systems & Control Letters, 12:169–175, 1990.
- E. Y. Keraï. Analysis of small time local controllability of a rigid body model. Dans *IFAC* Symposium on System Structure and Control, pages 645–650, 1995.
- H. K. Khalil. Nonlinear systems. Prentice-Hall, London, 1996.
- H. Krishnan, H McClamroch, et M. Reyhanoglu. On the attitude stabilization of a rigid spacecraft using two control torques. Dans *Proc. American Control Conference*, pages 1990–1995, 1992.
- J. Kurzweil. On the inversion of Ljapunov's second theorem on stability of motion. American Mathematical Society Translation, 24:19-77, 1963.
- J. Kurzweil et I. Vrkoč. The converse theorems of Lyapunov and Persidskij concerning the stability of motion. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 82:254–272, 1957.
- M. C. Laiou et A. Astolfi. Discontinuous control of high-order generalized chained systems. Systems & Control Letters, 37(5):309–322, 1999.
- W. Lin. Time-varying feedback control of nonaffine nonlinear systems without drift. Systems & Control Letters, 29(2):101–110, 1996.
- J. L. Massera. On Liapounoff's conditions of stability. *Annals of Mathematics*, 50(3): 705–721, 1949.
- J. L. Massera. Contributions to stability theory. *Annals of Mathematics*, 64:182–206, 1956.
- D. Q. Mayne et H. Michalska. Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35(7):814–824, 1990.
- H. Michalska et D. Q. Mayne. Receding horizon control of nonlinear systems. Systems & Control Letters, 16:123-130, 1991.
- P. Morin et C. Samson. Time-varying exponential stabilization of a rigid spacecraft with two control torques. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(4):528–534, 1997.
- P. Morin, C. Samson, J.-B. Pomet, et Z.-P. Jiang. Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls. *Systems & Control Letters*, 25(5): 375–385, 1995.
- H. Nijmeijer et A. Van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong Kong, 1990.
- R. Outbib. On global feedback stabilization of the angular velocity of a rigid body. Dans *Proc. IEEE conf. on Decision and Control*, pages 912–913, 1994.
- R. Outbib et G. Sallet. Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited. Systems & Control Letters, 18:93–98, 1992.
- K. Y. Pettersen et O. Egeland. Exponential stabilization of an underactuated surface vessel. *Model. Identif. Control*, 18(3):239–248, 1997.
- H. Rademacher. Über partielle und totale differenzierbarbeit I. Math. Ann., 79:340–359, 1919.

E. Roxin. Stability in general systems. Journal of Differential Equations, 1:115–150, 1965.

- E.P. Ryan. On brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback. Siam Journal on Control and Optimization, 32(6):1597–1604, 1994.
- C. Samson. Velocity and torque feedback control of nonholonomic cart. Dans C. Canudas de Witt, ed., *International Workshop on Nonlinear and Adaptative Control, Grenoble, France, 1990. Lecture Note in Control and Information Sciences*, pages 125–151, Berlin, Heidelberg, New-York, 1991. Springer-Verlag.
- H. Sira Ramirez. Dynamical sliding mode control strategies in the regulation of nonlinear chemical processes. *International Journal of Control*, 56(1):1–21, 1992.
- H. Sira Ramirez. Dynamical sliding mode control approach for vertical flight regulation in helicopters. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 141(1):19–24, 1994.
- H. Sira-Ramirez et B. Siguerdidjane. A redundant dynamical sliding mode control scheme for an asymptotic space vehicle stabilization. *International Journal of Control*, 65:901–912, 1996.
- O. J. Soerdalen et O. Egeland. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(1):35–49, 1995.
- E. D. Sontag. A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability. Siam Journal on Control and Optimization, 21:462–471, 1983.
- E. D. Sontag. Mathematical control theory, deterministic finite dimensional systems. Springler Verlag, New York Berlin Heidelberg, second edition, 1998.
- E. D. Sontag et H. J. Sussmann. Further comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body. Systems & Control Letters, 12:213-217, 1988.
- E. D. Sontag et H. J. Sussmann. Nonsmooth control-lyapunov functions. Dans *Proc. IEEE conf. on Decision and Control*, pages 2799–2805, New Orleans, 1995.
- A. Teel et L. Praly. Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. Systems & Control Letters, 22:313–325, 1994.
- A. R. Teel, R. M. Murray, et G. C. Walsh. Non-holonomic control systems: from steering to stabilization with sinusoids. *International Journal of Control*, 62(4):849–87, 1995.
- J. Tsinias. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilisation. *Mathematics of Control*, Signal and Systems, 2:343–357, 1989.
- J. Tsinias. A local stabilization theorem for interconnected systems. Systems & Control Letters, 18:429–434, 1992.
- J. Tsinias. An extension of Artstein's theorem on stabilization by using ordinary feedback integrators. Systems & Control Letters, 20:141–148, 1993.
- J. Tsinias. Smoothly global stabilizability by dynamic feedback and generalizations of Artstein's theorem. Siam Journal on Control and Optimization, 33(4):1071–1085, 1995.
- A. Uppal, W. H. Ray, et A. B. Poore. On the dynamic behaviour of continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science*, 29:967–985, 1974.

G. C. Walsh et L. G. Bushnell. Stabilization of multiple input chained form control system. Dans *Proc. IEEE conf. on Decision and Control*, 1993.

- F. W. Jr. Wilson. The structure of the level surfaces of a Lyapunov function. *Journal of Differential Equations*, 3:323–329, 1967.
- J. Wittenburg. Dynamics of systems of rigid bodies. B.G. Teubner Stuttgart, 1977.
- M. A. Zarkh. Optimal control with revising feedback. Dans Proceedings of the 3rd European Control Conference, Rome, Italy, 1995.
- V. I. Zubov. Methods of A.M. Liapounov and their application. Leningrad University Press, 1957.

Résumé

La première partie de ce travail de thèse porte sur la stabilisation des systèmes non linéaires par commande à horizon fuyant. Nous proposons tout d'abord un retour d'état discontinu et dynamique basé sur une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman permettant la stabilisation des systèmes non linéaires ne vérifiant pas les conditions de Brockett. Nous abordons ensuite le lien entre contrôlabilité asymptotique et stabilisabilité dans le cas des systèmes non linéaires. Nous établissons qu'un système asymptotiquement contrôlable est stabilisable par un retour d'état en temps continu-discret, quelque soit la fréquence d'échantillonnage a priori choisie. Nous poursuivons ensuite notre étude entre boucle ouverte et boucle fermée en mettant en évidence une propriété simple des trajectoires en boucle ouverte permettant la synthèse directe d'un retour d'état stabilisant. Cette propriété est ensuite utilisée pour une mise en œuvre numérique. Dans un soucis de performance, la version numérique de ce retour d'état se limite à une classe, toutefois grande, de systèmes vérifiant une certaine structure triangulaire. Cette classe englobe notamment les systèmes différentiellement plats et les systèmes chaînés. De nombreux exemples sont traités parmi lesquels, le problème du contrôle de l'attitude d'un satellite à deux moteurs. La seconde partie de ce travail de thèse porte sur l'observation des systèmes non linéaires dont une partie des états est donnée par une relation implicite en fonction des autres états. Ce problème est en fait un problème d'observation d'un système évoluant sur une variété plongée. La plupart des observateurs habituels ne permettent pas d'observer de manière robuste vis à vis d'éventuelles erreurs ces systèmes. En se basant sur l'observateur à grand gain, nous proposons un observateur qui rend la variété localement exponentiellement stable.

Mots clés : stabilisation, non linéaire, horizon fuyant, condition de Brockett, relation contrôlabilité/stabilisabilité, continu-discret, observation, systèmes implicites, grand gain

Abstract

The first part of this thesis work deals with the non linear stabilisation problem by means of receding horizon control laws. A dynamic discontinuous feedback, based on an Hamilton-Jacobi-Bellman equation with inequality final constraint and which enables the stabilisation of non linear systems that fails to satisfy the Brockett's necessary conditions is first proposed. The relation between asymptotic controlability and stabilisability in the non linear case is then treated. It is proved that an asymptotically controlable system is stabilisable by means of a continuous-discrete time feedback, whatever an a priori fixed sampling period. The relation between open-loop and closed-loop trajectories is then further analysed and sufficient conditions on the open-loop trajectory that enable a direct design of a stabilizing feedback are exhibited. These properties are then numerically exploited. In a performance aim, the numeric implementation deals with a wide class of systems showing off a specific triangular structure. This class contains among others the differentially flat systems and the chained form systems. Numerous exemples are exposed among which is the attitude control problem of a rigid spacecraft in failure mode. The second part of this work deals with the observation problem when a part of the states is given as a function of the rest of the states through an implicit relation. This problem can be resumed in the observation problem of a system evolving in a immersed manifold. Most of the usually used observers are unable to robustly observe these systems with respect to eventual system errors. A generalisation of the high gain observer that renders the manifold locally exponentially stable is proposed for this observation problem.

Keywords: stabilisation, non linear, receding horizon, Brockett's condition, controlability/stabilisability relation, continuous-discrete, observation, implicit systems, high gain